Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2024/25, 2. Termin, 11.4.2025
Sonja Kramer & Roland Steinbauer
Prüfungsausarbeitung

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Aspekte & Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [false] Aspekte zu einem mathematischen Begriff werden durch eine fachdidaktische Analyse gewonnen.
   (b) [true] Eine Grundvorstellung ist eine sinnstiftende inhaltliche Deutung eines mathematischen Begriffs.
   (c) [false] Unter dem Aspekt eines mathematischen Begriffs versteht man die mathematische Definition dieses Begriffs.
   (d) [true] Universelle Grundvorstellungen haben einen normativen Charakter.

2. (*Funktionsbegriff: Aspekte und Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt? Seien A und B Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion.
   (a) [false] Die Kovariationsvorstellung beruht darauf, dass f jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zuordnet.
   (b) [true] Der Paarmengenaspekt spielt darauf an, dass eine Funktion durch die Paare $(a, f(a)) \in A \times B$ beschrieben werden kann.
   (c) [false] Im Rahmen der Zuordnungsvorstellung wird f als ein einziges Objekt gesehen, das den Zusammenhang zwischen Elementen in A und B als Ganzes beschreibt.
   (d) [true] Die Objektvorstellung ermöglicht es besonders gut, Eigenschaften der gesamten Funktion, wie etwa ihre Monotonie zu erfassen.

3. (*Zum Folgenbegriff.*) Wir betrachten die Definition des Folgenbegriffs (Eine reelle Folge x ist eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$). Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) [false] Die Definition baut auf dem Iterationsaspekt auf.
   (b) [true] Die Definition baut auf dem Zuordnungsaspekt auf.
   (c) [false] Die Definition bedient wesentlich die Objektvorstellung.
   (d) [true] Der Aufzählungsaspekt ist in der Definitionsmenge $\mathbb{N}$ von Folgen sichtbar.

4. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über Eigenschaften reeller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind sinnvolle Be- und Umschreibungen der jeweiligen Definitionen?
   (a) [false] Unbeschränkte Folgen wachsen über jede positive Schranke hinaus.
   (b) [true] Ist eine Folge beschränkt, so gibt es ein (beschränktes) Intervall, aus dem die Folgenglieder nicht hinauswachsen können.

(c) [true] Monoton wachsende Folgen respektieren die $\leq$-Relation.

(d) [true] Um einen Häufungswert einer Folge tummeln sich in jeder Umgebung unendlich viele Folgenglieder.

5. *(Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff.)* Welche der folgenden Aussagen zum Grenzwertbegriff reeller Folgen

$$\lim x_n = a \quad \text{falls,} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N : \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

sind korrekt?

(a) [true] Die Grenzwertdefinition der Analysis ist eine überwiegend statische Formulierung.

(b) [false] Eine schlecht ausgeprägte Umgebungsvorstellung ist eine Hauptursache von Fehlvorstellungen.

(c) [false] Die Umgebungsvorstellung ist eine vorwiegend dynamische Vorstellung.

(d) [true] Der Grenzwertdefinition der Analysis liegt die Vorstellung vom aktual Unendlichen zugrunde.

6. (*Zur Differenzierbarkeit.)* Welche der folgenden Aussagen zum Begriff der Differenzierbarkeit reeller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

(a) [true] Die Grundvorstellung von der lokalen Linearität ist die fachmathematisch wichtigste.

(b) [true] Im Kontext der Schulanalysis ist die Grundvorstellung von der lokalen Änderungsrate dominant.

(c) [false] Der Aspekt „Grenzwert des Differenzenquotienten" hängt primär mit der Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors zusammen.

(d) [true] Die Grundvorstellung von der Tangentensteigung wird von beiden Aspekten des Differenzierbarkeitsbegriffs bedient.

2 Sätze & Resultate

7. (*Eigenschaften von Folgen, 1.*) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?

(a) [true] Wenn (x_n) konvergent ist, dann ist (x_n) auch beschränkt.

(b) [false] Wenn (x_n) beschränkt ist, dann ist (x_n) auch konvergent.

(c) [false] Wenn (x_n) nach oben beschränkt ist, dann ist (x_n) auch konvergent.

(d) [true] Wenn (x_n) nach oben beschränkt und monoton wachsend ist, dann ist (x_n) auch konvergent.

8. (*Eigenschaften von Folgen, 2.*) Welche der folgenden Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

(a) [true] Jede beschränkte reelle Folge hat einen Häufungswert.

(b) [false] Jede beschränkte reelle Folge hat einen Grenzwert.

(c) [true] Jede monotone und beschränkte reelle Folge hat einen Grenzwert.

(d) [false] Es gibt durchaus konvergente reelle Folgen mit zwei verschiedenen Grenzwerten.

9. *(Reihen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sind korrekt?

   (a) [true] Die Koeffizientenfolge einer konvergenten Reihe muss ebenfalls konvergieren.

   (b) [true] Die Koeffizientenfolge einer konvergenten Reihe muss ebenfalls konvergieren und zwar gegen 0.

   (c) [false] Ist die Koeffizientenfolge einer Reihe konvergent, so konvergiert die Reihe.

   (d) [false] Ist die Koeffizientenfolge einer Reihe eine Nullfolge, so konvergiert die Reihe.

10. *(Funktionen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

    (a) [false] Ist f stetig, dann ist f auch beschränkt.

    (b) [false] Ist f differenzierbar, dann ist f auch beschränkt.

    (c) [true] Ist f stetig, dann ist f integrierbar auf jedem Intervall $[a, b]$.

    (d) [true] Ist f differenzierbar, dann ist f auch stetig.

11. *(Kurvendiskussion.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) [true] Hat f in x_0 ein Extremum, dann hat f' dort eine Nullstelle.

    (b) [true] Hat f' in x_0 eine Nullstelle, dann muss f dort nicht unbedingt eine Extremstelle haben.

    (c) [false] Hat f in x_0 eine waagrechte Tangente, dann hat f in x_0 sicher eine Extremstelle.

    (d) [true] Ist f monoton wachsend, dann gilt $f'(x) \geq 0$ für alle x.

12. *(Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.)* Welche der folgenden Aussagen über den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung sind korrekt? Der Haupsatz besagt (für stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$):

    (a) [false] $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = f(x)$

    (b) [true] $F(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ ist eine Stammfunktion von f.

    (c) [true] Jede stetige Funktion hat eine Stammfunktion und diese ist dann automatisch differenzierbar.

    (d) [true] Falls G (beliebige) Stammfunktion von f ist, gilt $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a)$.

3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. *(Grenzwerte für Folgen & Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $\dfrac{n^2}{n!} \to 0$ für $n \to \infty$.

   (b) [true] $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2}$.

   (c) [false] $\dfrac{8n^3 + 4n^2 - 7}{4 + 4n^2 - 4n^3} \to \infty$.

   (d) [true] $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a > 0)$.

14. *(Folgengrenzwert konkret.)* Welche der folgenden Aussagen über die Folge

$$x_n = 1 + \left(\frac{-1}{n}\right)^n$$

   sind korrekt?

   (a) [false] In jeder Umgebung von $x = -1$ liegen unendlich viele Folgenglieder.

   (b) [true] In jeder Umgebung von $x = 1$ liegen unendlich viele Folgenglieder.

   (c) [false] In jeder Umgebung von $x = 0$ liegen unendlich viele Folgenglieder.

   (d) [true] In jeder Umgebung von $x = 1$ liegen fast alle Folgenglieder.

15. *(Eigenschaften von Funktionen.)* Welche Aussagen über die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$$

   sind korrekt?

   (a) [false] f ist beschränkt.

   (b) [true] f ist differenzierbar.

   (c) [true] f ist streng monoton wachsend.

   (d) [false] $f'(x) > 0$ für alle x.

16. *(Cosinusfunktion & Ableitung.)* Wir betrachten die folgende Überlegung für kleine h

$$\sin(h) = \sin(0 + h) \approx \sin(0) + \sin'(0)\, h = h\,.$$

   Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Die Überlegung ist korrekt, weil die Sinusfunktion in $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

   (b) [false] Die Überlegung ist nicht korrekt weil die Sinusfunktion in der Nähe von $x_0 = 0$ gut durch die waagrechte Gerade $y(h) = 1$ approximiert werden kann.

   (c) [true] Die Überlegung ist korrekt und zeigt, dass die Sinusfunktion in der Nähe von $x_0 = 0$ gut durch die erste Mediane approximiert werden kann.

   (d) [false] Die Überlegung ist nicht korrekt, weil das 2. Gleichheitszeichen falsch ist.

17. *(Differenzierbarkeit.)* Klarerweise gilt für die Funktion $f(x) = x^3$ auf $\mathbb{R}$, dass sie differenzierbar ist mit Ableitung

$$f'(x) = 3x^2$$

Aber welche der folgenden Argumentationen belegen das schlüssig?

(a) [false] $f(x+h) - f(x) = 3x^2h + h^2(3x+h) = f'(x)h + r(h)$ und $r(h) \to 0$ für $h \to 0$.

(b) [false] f ist stetig und daher differenzierbar. Die Form der Ableitung ergibt sich dann aus der Ableitungsregel $(x^n)' = nx^{n-1}$.

(c) [true] Die Aussage folgt aus der Ableitungsregel für Potenzfunktionen $(x^n)' = nx^{n-1}$.

(d) [true]

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3x^2 + h(3x+h) \to 3x^2 \quad (h \to 0).$$

18. *(Stückweise definierte Funktion.)* Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] f ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und es gilt $\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = 0$ und $\lim_{x \searrow 0} f'(x) = \lim_{x \searrow 0} 2x = 0$.

(b) [false] (b) ist korrekt und daher ist f auch in $x_0 = 0$ differenzierbar.

(c) [true] f ist differenzierbar in $x_0 = 0$ mit $f'(0) = 0$, weil der Limes des Differenzenquotienten bei $x_0 = 0$ gegen 0 geht (für x gegen 0).

(d) [false] Weil f in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist, ist dort auch kein lokales Minimum.

Teil 2: Offene Aufgaben

1 Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

1. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

   (a) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und seien $a, b \in I$. Dann gilt:

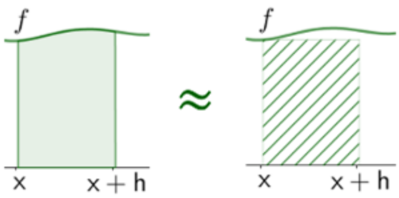
   (i) Die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) := \int\limits_a^x f(t)\, dt$ ist stetig differenzierbar und es gilt $F' = f$ (d.h. $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.) Insbesondere ist F eine Stammfunktion von f.

   (ii) Sie G eine beliebige Stammfunktion von f, dann gilt $\int\limits_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$.

   (b) Beweisidee: Wir müssen für $F(x) := \int\limits_a^x f(t)\, dt$ zeigen, dass $F' = f$ gilt. Dazu berechnen wir den Differenzenquotient:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \approx \frac{f(x) \cdot h}{h} = f(x)$$

   Der Übergang $\approx$ ist gerechtfertigt, da näherungsweise gilt, dass der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graph von f und der x-Achse von x nach $x+h$ für kleine h dem Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seiten h und $f(x)$ entspricht. (Diese Aussage wird durch der Mittelwertsatz der Integralrechnung exakt gemacht.)
   Oder in anderen Worten: Beim Übergang $\approx$ wird für kleine h die Approximation $F(x+h) \approx f(x) \cdot h$ verwendet.
   Folgende Skizze verdeutlicht das " $\approx$ ":



2 Aufgaben zur Fachdidaktischen Reflexion

1. *Zum Folgenbegriff*

   (a) Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt. Unter einem Aspekt eines mathematischen Begriffs versteht man eine Facette dieses Begriffs, mit der dieser fachlich beschreiben werden kann. Ein Aspekt bezieht sich immer auf fachmathematische Inhalte, wohingegen Grundvorstellungen aus fachdidaktischen Überlegungen heraus formuliert sind.

In der Beziehung zwischen Grundvorstellungen und Aspekten sind es die Grundvorstellungen, die Aspekte eines mathematischen Begriffs in einen sinnhaltigen Kontext setzen.

(b) Dei drei Aspekte des Folgenbegriffs sind:

- Iterations- bzw. Rekursionsaspekt: Jedes Folgenglied (außer dem ersten) wird sukzessive aus seinem Vorgänger/seinen Vorgänger konstruiert.
- Aufzählungsaspekt: Eine Folge wird als sukzessive Auflistung, oder Aufzählung von Zahlen oder Objekten betrachtet.
- Zuordnungsaspekt: Hier wird eine Folge als Funktion mit Definitionsmenge $\mathbb{N}$ betrachtet, die jeder natürlichen Zahl einen Funktionswert/Folgenglied zuordnet.

Zur Einführung von Folgen im Unterricht bietet sich vorrangig der Iterationsaspekt an, weil damit außermathematische (diskrete) Prozesse mittels rekursiv dargestellter Folgen modelliert werden können. Eine solche Einführung ermöglicht es, die Winter´schen Grunderfahrungen erlebbar zu machen (vor allem die erste: Mathematischer Blick).

Einstiegsaufgabe: Ein Patient nimmt täglich eine Tablette mit 10 mg eines bestimmten Wirkstoffs ein. Bis zur Einnahme der nächsten Tablette am folgenden Tag, werden im Körper 60% des im Körper vorhandenen Wirkstoffs abgebaut. Wie entwickelt sich der Wirkstoffgehalt im Laufe mehrerer Tage?
Lösungserwartung: $m_0 = d = 10\text{mg}$, $r = 0,4$, $m_{n+1} = r \cdot m_n + d$

3 Aufgaben zur Unterrichtspraxis

1. *Stetigkeit von Funktionen*

(a) Die Angabe eines Funktion braucht die Angabe einer Definitions- und Zielmenge, was in der Fragestellung nicht gegeben ist. Der größtmögliche Definitionsbereich der gegebenen Funktion wäre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Stelle 0 kann somit auf keinen Fall Element des Definitionsbereichs sein und insofern ist die Frage nach der Stetigkeit an der Stelle $x = 0$ nicht sinnvoll, weil Stetigkeit überhaupt nur für Argumente aus dem Definitionsbereich definiert ist.

(b) Sinn ergibt der generierte Beginn als Antwort auf die Fragestellung: „Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x}$ stetig fortsetzbar auf ganz $\mathbb{R}$?".
Wie die Antwort des LLM zeigt (und das ist korrekt) gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Wenn wir daher $f(0) = 0$ setzen, haben wir die Funktion stetig nach 0 (d.h. auf ganz $\mathbb{R}$) fortgesetzt.

(c) Ich finde deine Unterhaltung mit der LLM sehr interessant. Ist dir aufgefallen, dass die generierte Antwort nicht wirklich auf deine ursprüngliche Frage eingeht?

Das liegt daran, dass du nach der Stetigkeit an der Stelle $x = 0$ fragst, die aber gar nicht im Definitionsbereich von f liegt, egal wie (groß) er definiert ist. (Eine Funktion ist ja erst dann vollständig gegeben, wenn wir auch wissen, „wo sie lebt“, also welchen Definitions- und Zielbereich sie hat.) Und eine Funktion kann nur an Stellen im Definitionsbereich stetig sein oder nicht. Eine Frage nach der Stetigkeit an einer Definitionslücke hat gar keinen Sinn. (Das ist etwa so, wie nach der Farbe eines unsichtbaren Autos zu fragen.)

Sinnvolle Fragen sind „Ist die Funktion f auf ihrem größtmöglichen Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig?“ und andererseits „Kann die Funktion f zu einer stetigen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ gemacht (man sagt auch stetig fortgesetzt) werden?“. Der Beginn der generierte Antwort der LLM geht übrigens auf die zweite Fragestellung ein. Überlege dir auf beide Fragen eine Antwort und dann bin ich schon gespannt, was ChatGPT dazu sagt.