NAME:		MAT.NR.	

Prüfung zu

Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2024/25
3. Termin, 2.7.2025
GRUPPE A

Sonja Kramer, Roland Steinbauer

Erläuterungen zum Multiple Choice Teil: Für jede der 18 Fragen sind

4 Antwortmöglichkeiten angegeben, von denen 1, 2 oder 3 korrekt sind.

Die **„Bepunktung“** ist wie folgt: Für das Kreuzen einer korrekten Antwort erhalten Sie 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte (also z.B. bei 2 richtigen Antwortmöglichkeiten 1/2 Pkt pro gekreuzter richtiger Antwort, etc). Beim Ankreuzen einer falschen Antwort wird 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte abgezogen. Nichtankreuzen einer richtigen oder einer falschen Antwort ergibt keine Punkte. Pro Frage gibt es keine negativen Punkte, d.h. Sie können jeweils zwischen 0 und 1 Punkte pro Frage erreichen, insgesamt also höchstens 18 Punkte.

Die MC-Fragen müssen Sie auf dem gesonderten Antwortbogen ankreuzen. Dort müssen Sie Ihren Namen angeben und ihre Matrikelnummer eintragen **und vertikal als Ziffern ankreuzen**.

Beim **offenen Teil** der Prüfung können Sie ebenfalls maximal 18 Punkte erreichen. Die Punkte sind bei den jeweiligen Teilaufgaben angegeben.

Viel Erfolg!

Bitte nicht ausfüllen!

MC	1	2	3	4	OT	$\sum$	Note
(18)	(6)	(5)	(4)	(3)	(18)	(36)	

Teil 1: Multiple-Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Aspekte & Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) Unter einem Aspekt eines mathematischen Begriffs versteht man eine inhaltliche Deutung, die diesem Sinn gibt.
   (b) Individuelle Grundvorstellungen können als Ausgangspunkt einer Intervention im Unterricht dienen.
   (c) Aspekte eines mathematischen Begriffs werden durch eine fachdidaktische Analyse gewonnen.
   (d) Primäre Grundvorstellungen beziehen sich auf Alltagsbegriffe und anschauliche Gegebenheiten.

2. (*Graph einer Funktion.*) Welche Aussagen sind korrekt? Der Graph $G(f)$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   (a) ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.
   (b) besteht aus geordneten Paaren $(x, f(x))$.
   (c) ist die Menge $G(f) = \{(f(x), x) : x \in \mathbb{R}\}$.
   (d) ist das Produkt aus Definitions- und Wertemenge.

3. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über Eigenschaften reeller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind sinnvolle Be- und Umschreibungen der jeweiligen Eigenschaften?
   (a) Beschränkte Folgen sind in einer beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$ „eingesperrt".
   (b) Ein Häufungswert der Folge ist ein Punkt in $\mathbb{R}$ bei dem die Folge „immer wieder beliebig nahe vorbeikommt".
   (c) Monoton wachsende Folgen respektieren die $<$-Relation.
   (d) Nach oben unbeschränkte Folgen wachsen über jede (positive) Schranke in $\mathbb{R}$ hinaus.

4. *(Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff, 1)* Welche der folgenden Aussagen zum Grenzwertbegriff reeller Folgen

   $$\lim x_n = a \quad \text{falls,} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N : \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

   sind primär mit der Annäherungsvorstellung verbunden?
   (a) Die Folge nähert sich dem Grenzwert schließlich beliebig nahe an.
   (b) In jeder Umgebung liegen fast alle Folgenglieder.
   (c) Der Grenzwert ist eine Zahl, die durch die Folge konstruiert bzw. definiert wird.
   (d) Die Folge kommt dem Grenzwert schließlich beliebig nahe.

5. *(Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff, 2)* Welche der folgenden (tw. ungenauen bzw. inkorrekten) Studierendenaussagen zum Grenzwertbegriff für reelle Folgen korrelieren mit der Umgebungsvorstellung?

   (a) Ab einem bestimmten Index liegen alle weiteren Folgenglieder in einer beliebigen Epsilonumgebung um den Grenzwert.

   (b) Der Grenzwert ist, wohin die Folge will, wenn man sie endlos weiterspinnt.

   (c) Fast alle Folgenglieder liegen ε-nahe am Grenzwert.

   (d) Die Folge nimmt den Grenzwert im Unendlichen an.

6. (*Differenzierbarkeit.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Der Differenzenquotient
   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
   von f in x_0 ist die absolute Änderung von f im Intervall $[x, x_0]$ (bzw. $[x_0, x]$).

   (b) Konvergiert der Differenzialquotient von f in x_0 für $x \to x_0$ gegen einen endlichen Wert, so ist f in x_0 differenzierbar.

   (c) Falls f in x_0 differenzierbar ist, dann ist die Ableitung $f'(x_0)$ der Limes des Differenzenquotienten von f bei x_0 für $x \to x_0$.

   (d) Ist f in x_0 differenzierbar, dann ist die Tangente an f in x_0 die Gerade durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit Anstieg $f'(x_0)$.

2 Sätze & Resultate

7. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?

   (a) Ist (x_n) monoton und beschränkt, dann ist (x_n) schon konvergent.

   (b) Wenn (x_n) beschränkt ist, dann hat (x_n) zumindest einen Häufungswert.

   (c) Wenn (x_n) beschränkt ist, dann ist (x_n) auch konvergent.

   (d) Wenn (x_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, dann ist (x_n) schon beschränkt.

8. *(Zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist eine Exaktifizierung der anschaulichen Vorstellung der Lückenlosigkeit von $\mathbb{R}$.

   (b) Nur weil $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert jede reelle Cauchyfolge.

   (c) Das Intervallschachtelungsprinzip besagt, dass jede Folge von sich zusammenziehenden und geschachtelten Intervallen genau einen Punkt enthält.

   (d) $\mathbb{R}$ ist der (bis auf Isomorphie) einzige ordnungsvollständige geordnete Körper, der $\mathbb{Q}$ als geordneten Unterkörper besitzt.

9. *(Reihen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sind korrekt?

   (a) Konvergiert die Reihe, dann können nicht alle Reihenglieder x_n positiv sein.

   (b) Gilt für die Reihenglieder $x_n \not\to 0$, dann divergiert die Reihe.

   (c) Falls die Reihe konvergiert, dann muss die Folge der Reihenglieder x_n konvergieren.

   (d) Die Koeffizientenfolge (x_n) einer konvergenten Reihen ist eine Nullfolge.

10. *(Funktionen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

    (a) Ist f stetig, dann auch beschränkt.

    (b) Knicke des Graphen von f sind prototypische Unstetigkeitsstellen.

    (c) Ist f stetig, so hat der Graph von f keine Knicke.

    (d) Ist f differenzierbar, dann ist f auch stetig.

11. *(Kurvendiskussion.)* Sei $f : I = (-1, 1) \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) Gilt $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in I$, dann hat f in x_0 eine Extremstelle.

    (b) Gilt $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in I$, dann hat f in x_0 eine waagrechte Tangente.

    (c) Hat f in $x_0 \in I$ ein Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

    (d) f hat globale Extremstellen.

12. *(Differenzial- und Integralrechnung.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

    (a) Ist f beschränkt, so hat f auch eine Stammfunktion.

    (b) Stammfunktionen sind immer differenzierbar.

    (c) Je zwei Stammfunktionen von f unterscheiden sich um eine Konstante.

    (d) Ist f stetig, dann ist $F(s) := \int_a^s f(x)\,dx$ (mit $a \in \mathbb{R}$ beliebig) eine Stammfunktion von f.

3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. *(Grenzwerte für Folgen & Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen sind für $n \to \infty$ korrekt?

    (a) $\dfrac{n^n}{n!} \to 0.$

    (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{4}{3}.$

    (c) $\dfrac{4n + 4n^2 - 4n^3}{4 + 4n^2 - 3n^3} \to \dfrac{4}{3}.$

    (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \infty.$

14. *(Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für alle $q \in \mathbb{R}$.

    (b) $0.\bar{9} = 0.9 \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 1.$

    (c) Das Konvergenzprinzip für monotone beschränkte Folgen garantiert, dass alle Dezimalzahldarstellungen (d.h. Reihen der Form

    $$\sum_k (a_k)(10)^{-k}$$

    mit $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$) einen eindeutigen Grenzwert haben.

    (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = 1.$

15. *(Eigenschaften von Funktionen.)* Welche Aussagen über die Funktion

    $$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{sind korrekt?}$$

    (a) f ist nach oben und nach unten unbeschränkt.

    (b) f ist differenzierbar.

    (c) f ist streng monoton wachsend.

    (d) $f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$

16. *(Die Funktion $f(x) = 4x^5$.)* Welche der folgenden Aussagen über die Funktion

    $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 4x^5 \qquad \text{sind korrekt?}$$

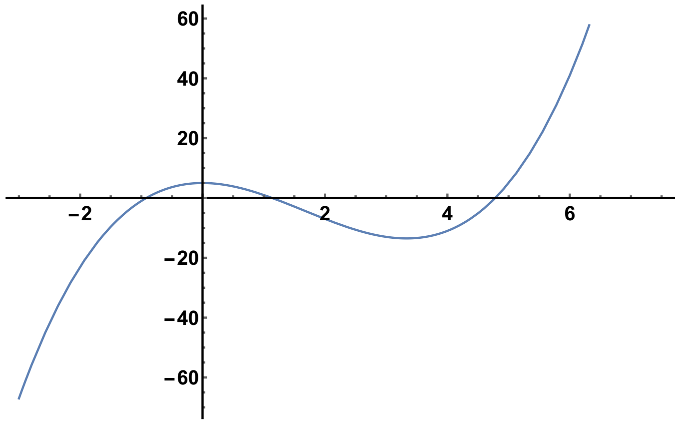
    (a) f ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit positiver Ableitung.

    (b) f ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

    (c) f ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

    (d) $F(x) = \frac{2}{3}x^6$ ist eine Stammfunktion von f.

17. *(Grafische Kurvendiskussion.)* Wir betrachten die reelle Funktion f mit dem abgebildeten Graphen:



Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) f hat im Intervall $(-2, 6)$ genau zwei lokale Extrema.

(b) f hat im Intervall $[-2, 2]$ genau ein lokales Maximum.

(c) f hat im Intervall $[-2, 2]$ genau ein lokales Extremum.

(d) f' ist im Intervall $[-2, 1]$ positiv.

18. *(Integrieren konkret.)* Welche der folgenden Berechnungen einer Stammfunktion von $f(x) = \cos(2x)$ ist korrekt?

(a)
$$\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(z)\,dz = \frac{1}{2}\sin(2x).$$
(mittels Substitution $z = 2x$)

(b)
$$\int \cos(2x)dx = \int \big(\cos^2(x) - \sin^2(x)\big)dx = \int 1dx = x.$$
(mittels Doppelwinkelformel und (trigonometrischem) Pythagoras)

(c)
$$\int \cos(2x)\,dx = \int \big(\cos^2(x) - \sin^2(x)\big)dx = \sin(x)\cos(x)$$
(mittels Doppelwinkelformel und weil mit partieller Integration
$\int \cos^2(x)\,dx = \int \cos(x)\cos(x)\,dx = \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)\,dx$.)

(d)
$$\int \cos(2x)dx = \int \big(1 - 2\sin^2(x)\big)\,dx = x - 2\int \sin^2(x)\,dx = x - \frac{2}{3}\sin^3(x).$$
(mittels Doppelwinkelformel)

Teil 2: Offene Aufgaben

1 Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

1. *Häufungswert versus Grenzwert.*
   Definition (Häufungswert). Ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungswert* der reellen Folge (x_n), falls
   $$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n' \geq n_0 : \quad |x - x_{n'}| < \varepsilon. \tag{1}$$
   (a) Geben Sie die Definition des Grenzwerts von Folgen an. Was ist der formale Unterschied zwischen den beiden Definitionen. (1 Pkt)

   (b) Beschreiben Sie verbal, wie sich der Grenzwertbegriff vom Begriff Häufungswert unterscheidet. Verwenden Sie dabei für jeden der beiden Begriffe *Häufungswert* und *Grenzwert* eine geeignete verbale Formulierung. (3 Pkte)

   (c) Diskutieren Sie anhand der Folge
   $$a_n = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ 1/n & n \text{ ungerade,} \end{cases} \tag{2}$$
   dass die Aussage

   „Hat eine reelle Folge genau einen Häufungswert, dann ist dieser der Grenzwert der Folge.“

   nicht stimmt, und geben Sie eine zusätzliche Eigenschaft an, die garantiert, dass eine Folge mit genau einem Häufungswert konvergiert. (2 Pkte)

2 Aufgaben zur fachdidaktischen Reflexion und zur Unterrichtspraxis

2. *Eine Funktion und ihr Graph.*
   Eine Funktion f ist gegeben durch ihren Graph
   $$G(f) = \{(x, x^{-2}) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{3}$$
   (a) Zählen Sie alle Aspekte des Funktionsbegriffs auf und argumentieren Sie, welcher Aspekt durch die gegebene Notation vorrangig angesprochen wird. (1 Pkt)

   (b) Skizzieren Sie den Graph der Funktion f und geben Sie die Funktion f in Funktionsschreibweise an. (2 Pkte)

   (c) Finden Sie größtmögliche Intervalle I und Intervalle J, so dass f als Funktion von I nach J die folgenden Eigenschaften hat (2 Pkte):

      (i) injektiv, aber nicht bijektiv

      (ii) bijektiv.

3. *Stetigkeit versus Differenzierbarkeit.*
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 2|$.

   (a) In welchen Punkten ist f stetig, in welchen differenzierbar? Begründen Sie. (2 Pkte)

   (b) Erläutern Sie, wieso für die Überlegung, in welchen Punkten f differenzierbar ist, die Grundvorstellung der lokalen Linearität hilfreich ist, und wie die Funktionenlupe das veranschaulichen kann. (2 Pkte)

4. *Integralrechnung.*
Im Folgenden finden Sie die Aufgabe *Regelung der Temperatur* aus dem Teil B der SRDP (BHS) vom 08.05.2025.

> Die Temperatur in einem Warmwasserspeicher während des Aufheizens kann modellhaft durch die Funktion T beschrieben werden.
>
> $T(t) = a - 15 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t} \cdot \cos(0{,}1 \cdot t)$
>
> t … Zeit in min mit $t = 0$ für den Beginn des Aufheizens
> $T(t)$ … Temperatur zur Zeit t in °C
> a … positiver Parameter
>
> (...)
>
> Es gilt:
>
> $\frac{1}{t_1} \cdot \int_0^{t_1} T(t)\,\mathrm{d}t \approx 57{,}4$
>
> **4)** Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an. *[0/1 P.]*

   (a) Lösen Sie die Aufgabe und formulieren Sie eine Erklärung für Ihre Schüler:innen, wie sie die gefragte Einheit ermitteln können. (2 Pkte)

   (b) Beschreiben Sie jene Grundvorstellung zum Integralbegriff, die zur Bearbeitung der gegebenen Aufgabenstellung aufgebaut sein soll(te). (1 Pkt)