Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2024/25, 3. Termin, 2.7.2025
Sonja Kramer & Roland Steinbauer
Prüfungsausarbeitung

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Aspekte & Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [false] Unter einem Aspekt eines mathematischen Begriffs versteht man eine inhaltliche Deutung, die diesem Sinn gibt.
   (b) [true] Individuelle Grundvorstellungen können als Ausgangspunkt einer Intervention im Unterricht dienen.
   (c) [false] Aspekte eines mathematischen Begriffs werden durch eine fachdidaktische Analyse gewonnen.
   (d) [true] Primäre Grundvorstellungen beziehen sich auf Alltagsbegriffe und anschauliche Gegebenheiten.

2. (*Graph einer Funktion.*) Welche Aussagen sind korrekt? Der Graph $G(f)$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   (a) [true] ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.
   (b) [true] besteht aus geordneten Paaren $(x, f(x))$.
   (c) [false] ist die Menge $G(f) = \{(f(x), x) : x \in \mathbb{R}\}$.
   (d) [false] ist das Produkt aus Definitions- und Wertemenge.

3. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über Eigenschaften reeller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind sinnvolle Be- und Umschreibungen der jeweiligen Eigenschaften?
   (a) [true] Beschränkte Folgen sind in einer beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$ „eingesperrt".
   (b) [true] Ein Häufungswert der Folge ist ein Punkt in $\mathbb{R}$ bei dem die Folge „immer wieder beliebig nahe vorbeikommt".
   (c) [false] Monoton wachsende Folgen respektieren die $<$-Relation.
   (d) [true] Nach oben unbeschränkte Folgen wachsen über jede (positive) Schranke in $\mathbb{R}$ hinaus.

4. *(Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff, 1)* Welche der folgenden Aussagen zum Grenzwertbegriff reeller Folgen

   $$\lim x_n = a \quad \text{falls,} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N : \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

   sind primär mit der Annäherungsvorstellung verbunden?
   (a) [true] Die Folge nähert sich dem Grenzwert schließlich beliebig nahe an.

(b) [false] In jeder Umgebung liegen fast alle Folgenglieder.

(c) [false] Der Grenzwert ist eine Zahl, die durch die Folge konstruiert bzw. definiert wird.

(d) [true] Die Folge kommt dem Grenzwert schließlich beliebig nahe.

5. *(Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff, 2)* Welche der folgenden (tw. ungenauen bzw. inkorrekten) Studierendenaussagen zum Grenzwertbegriff für reelle Folgen korrelieren mit der Umgebungsvorstellung?

   (a) [true] Ab einem bestimmten Index liegen alle weiteren Folgenglieder in einer beliebigen Epsilonumgebung um den Grenzwert.

   (b) [false] Der Grenzwert ist, wohin die Folge will, wenn man sie endlos weiterspinnt.

   (c) [true] Fast alle Folgenglieder liegen ε-nahe am Grenzwert.

   (d) [false] Die Folge nimmt den Grenzwert im Unendlichen an.

6. (*Differenzierbarkeit.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Der Differenzenquotient
   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
   von f in x_0 ist die absolute Änderung von f im Intervall $[x, x_0]$ (bzw. $[x_0, x]$).

   (b) [false] Konvergiert der Differenzialquotient von f in x_0 für $x \to x_0$ gegen einen endlichen Wert, so ist f in x_0 differenzierbar.

   (c) [true] Falls f in x_0 differenzierbar ist, dann ist die Ableitung $f'(x_0)$ der Limes des Differenzenquotienten von f bei x_0 für $x \to x_0$.

   (d) [true] Ist f in x_0 differenzierbar, dann ist die Tangente an f in x_0 die Gerade durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit Anstieg $f'(x_0)$.

2 Sätze & Resultate

7. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?

   (a) [true] Ist (x_n) monoton und beschränkt, dann ist (x_n) schon konvergent.

   (b) [true] Wenn (x_n) beschränkt ist, dann hat (x_n) zumindest einen Häufungswert.

   (c) [false] Wenn (x_n) beschränkt ist, dann ist (x_n) auch konvergent.

   (d) [true] Wenn (x_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, dann ist (x_n) schon beschränkt.

8. *(Zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist eine Exaktifizierung der anschaulichen Vorstellung der Lückenlosigkeit von $\mathbb{R}$.

   (b) [true] Nur weil $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert jede reelle Cauchyfolge.

(c) [false] Das Intervallschachtelungsprinzip besagt, dass jede Folge von sich zusammenziehenden und geschachtelten Intervallen genau einen Punkt enthält.

(d) [true] $\mathbb{R}$ ist der (bis auf Isomorphie) einzige ordnungsvollständige geordnete Körper, der $\mathbb{Q}$ als geordneten Unterkörper besitzt.

9. *(Reihen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sind korrekt?

   (a) [false] Konvergiert die Reihe, dann können nicht alle Reihenglieder x_n positiv sein.

   (b) [true] Gilt für die Reihenglieder $x_n \not\to 0$, dann divergiert die Reihe.

   (c) [true] Falls die Reihe konvergiert, dann muss die Folge der Reihenglieder x_n konvergieren.

   (d) [true] Die Koeffizientenfolge (x_n) einer konvergenten Reihen ist eine Nullfolge.

10. *(Funktionen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) [false] Ist f stetig, dann auch beschränkt.

   (b) [false] Knicke des Graphen von f sind prototypische Unstetigkeitsstellen.

   (c) [false] Ist f stetig, so hat der Graph von f keine Knicke.

   (d) [true] Ist f differenzierbar, dann ist f auch stetig.

11. *(Kurvendiskussion.)* Sei $f : I = (-1, 1) \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Gilt $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in I$, dann hat f in x_0 eine Extremstelle.

   (b) [true] Gilt $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in I$, dann hat f in x_0 eine waagrechte Tangente.

   (c) [true] Hat f in $x_0 \in I$ ein Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

   (d) [false] f hat globale Extremstellen.

12. *(Differenzial- und Integralrechnung.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) [false] Ist f beschränkt, so hat f auch eine Stammfunktion.

   (b) [true] Stammfunktionen sind immer differenzierbar.

   (c) [true] Je zwei Stammfunktionen von f unterscheiden sich um eine Konstante.

   (d) [true] Ist f stetig, dann ist $F(s) := \int_a^s f(x)\,dx$ (mit $a \in \mathbb{R}$ beliebig) eine Stammfunktion von f.

3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. *(Grenzwerte für Folgen & Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen sind für $n \to \infty$ korrekt?

   (a) [false] $\dfrac{n^n}{n!} \to 0.$

   (b) [true] $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{4}{3}.$

   (c) [true] $\dfrac{4n + 4n^2 - 4n^3}{4 + 4n^2 - 3n^3} \to \dfrac{4}{3}.$

   (d) [false] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \infty.$

14. *(Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für alle $q \in \mathbb{R}$.

   (b) [true] $0.\bar{9} = 0.9 \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 1.$

   (c) [false] Das Konvergenzprinzip für monotone beschränkte Folgen garantiert, dass alle Dezimalzahldarstellungen (d.h. Reihen der Form
   $$\sum_k (a_k)(10)^{-k}$$
   mit $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$) einen eindeutigen Grenzwert haben.

   (d) [false] $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = 1.$

15. *(Eigenschaften von Funktionen.)* Welche Aussagen über die Funktion
   $$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{sind korrekt?}$$

   (a) [true] f ist nach oben und nach unten unbeschränkt.

   (b) [true] f ist differenzierbar.

   (c) [false] f ist streng monoton wachsend.

   (d) [false] $f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$

16. *(Die Funktion $f(x) = 4x^5$.)* Welche der folgenden Aussagen über die Funktion
   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 4x^5 \qquad \text{sind korrekt?}$$

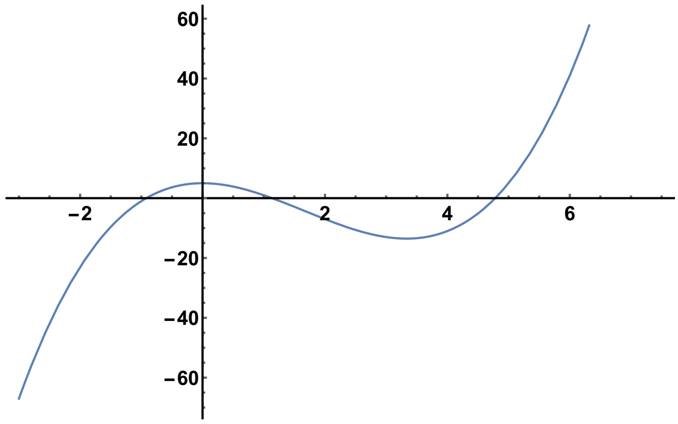
   (a) [false] f ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit positiver Ableitung.

   (b) [true] f ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

   (c) [false] f ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

   (d) [true] $F(x) = \frac{2}{3}x^6$ ist eine Stammfunktion von f.

17. *(Grafische Kurvendiskussion.)* Wir betrachten die reelle Funktion f mit dem abgebildeten Graphen:



Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] f hat im Intervall $(-2, 6)$ genau zwei lokale Extrema.

(b) [true] f hat im Intervall $[-2, 2]$ genau ein lokales Maximum.

(c) [false] f hat im Intervall $[-2, 2]$ genau ein lokales Extremum.

(d) [false] f' ist im Intervall $[-2, 1]$ positiv.

18. *(Integrieren konkret.)* Welche der folgenden Berechnungen einer Stammfunktion von $f(x) = \cos(2x)$ ist korrekt?

(a) [true]

$$\int \cos(2x)\, dx \;=\; \frac{1}{2} \int \cos(z)\, dz \;=\; \frac{1}{2} \sin(2x).$$

(mittels Substitution $z = 2x$)

(b) [false]

$$\int \cos(2x) dx \;=\; \int \big(\cos^2(x) - \sin^2(x)\big) dx \;=\; \int 1 dx \;=\; x.$$

(mittels Doppelwinkelformel und (trigonometrischem) Pythagoras)

(c) [true]

$$\int \cos(2x)\, dx \;=\; \int \big(\cos^2(x) - \sin^2(x)\big) dx \;=\; \sin(x)\cos(x)$$

(mittels Doppelwinkelformel und weil mit partieller Integration $\int \cos^2(x)\, dx \;=\; \int \cos(x)\cos(x)\, dx \;=\; \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)\, dx$.)

(d) [false]

$$\int \cos(2x) dx \;=\; \int \big(1 - 2\sin^2(x)\big)\, dx \;=\; x - 2 \int \sin^2(x)\, dx \;=\; x - \frac{2}{3} \sin^3(x).$$

(mittels Doppelwinkelformel)

Teil 2: Offene Aufgaben

1 Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

1. *Häufungswert versus Grenzwert.*

   (a) Definition des Grenzwerts: Eine reelle Folge (x_n) konvergiert gegen ein $x \in \mathbb{R}$, falls

   $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad |x - x_n| < \varepsilon. \tag{1}$$

   Der formale Unterschied liegt in der Vertauschung der Reihenfolge der Quantoren $\forall$ und $\exists$.

   (b) Der Unterschied liegt darin, dass in jeder (noch so kleinen) Umgebung um den Grenzwerts fast alle Folgenglieder liegen und in jeder Umgebung des Häufungswerts nur unendlich viele. Anders gesagt, die Folge bleibt schließlich in jeder Umgebung des Grenzwerts vs. kommt (egal wie spät) immer wieder in jede Umgebung des Häufungswerts.

   (Noch anders gesagt, müssen nicht alle Folgenglieder ab einem bestimmten Index nahe am Häufungswert sein, sondern können sich auch immer wieder von ihm entfernen, was beim Grenzwert nicht der Fall ist.)(

   (c) Die Folge (a_n) hat den Häufungswert 0, der aber nicht Grenzwert ist, weil jedes zweite Folgenglieder aus kleinen Umgebung um 0 herausspringt.

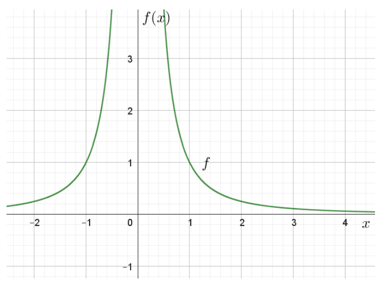
   Beschränktheit garantiert die Konvergenz von Folgen mit genau einem Häufungswert. (Es gilt sogar: Eine Folge mit genau einem Häufungswert ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.)

2 Aufgaben zur fachdidaktischen Reflexion und zur Unterrichtspraxis

2. *Eine Funktion und ihr Graph.*

   (a) Aspekte des Funktionsbegriffs: Zuordnungsaspekt und Paarmengenaspekt. Die gegebene Notation spricht vorrangig den Paarmengenaspekt an.

   (b) Skizze:

   Funktionsnotation: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x^2}$ (oder $f(x) = \frac{1}{x^2}$).

(c) (i) $I = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, $J = \mathbb{R}$ (oder auch $I = \mathbb{R}^-$ bzw. $J = [0, \infty)$).

(ii) $I = J = \mathbb{R}^+$ (oder auch $I = \mathbb{R}^-$, $J = \mathbb{R}^+$).

3. *Stetigkeit versus Differenzierbarkeit.*

   (a) Die Funktion f ist als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig auf ganz $\mathbb{R}$. (oder: Sie ist stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ als jeweils lineare Funktion und $\lim_{x\nearrow 2} f(x) = 0 = \lim_{x\searrow 2} f(x)$) Die Funktion ist als Verknüpfung differenzierbarer Funktionen differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ (dort ist f sogar linear). Der Funktionsgraph hat aber in $x = 2$ einen Knick und f ist deswegen dort nicht differenzierbar. (Oder der Grenzwert des Differenzenquotienten bei $x_0 = 2$
   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$$
   existiert nicht, (der links- und der rechtseitige Grezwert stimmen nicht überein)).

   Bemerkung. Falsch wäre: Weil der links- und rechstseitige Grenzwert der Ableitungsfunktion f' bei $x_0 = 2$ nicht übereinstimmt.

   (b) Die Grundvorstellung der lokalen Linearität ist, dass man beim stark vergrößerten Blick auf die Umgebung eines Punktes am Graphen einer differenzierbaren Funktion ein nahezu geradliniges Kurvenstück sieht. Bei einer nicht-differenzierbaren Stelle veranschaulicht die Funktionenlupe, dass es auch bei starkem Hineinzoomen keine (affin) lineare Funktion gibt, die die Ausgangsfunktion approximiert. Im Falle von f bleibt der Knick während des Hineinzoomens bestehen.

4. *Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung.*

   (a) Interpretation: Die mittlere Temperatur im Zeitintervall $[0; t_1]$ beträgt rund 57,4 °C.

   Eine Möglichkeit zum Ermitteln der zugehörigen Einheit ist das Bestimmen der Einheiten der beiden Faktoren. Eine andere Möglichkeit bietet die Kenntnis, dass der Term einen durchschnittlichen Funktionswert und damit einen Wert in °C angibt.

   (b) Mittelwertgrundvorstellung: Die Mittelwertgrundvorstellung bringt zum Ausdruck, dass mithilfe des Integrals einer gegebenen Funktion über ein Intervall, dividiert durch die Länge des Intervalls, der Mittelwert der Funktion berechnet werden kann.