Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

1
2
3
4
G

☐ **R. Steinbauer**
☐ **H. Schichl**

Note:

Prüfung zu Einführung in das mathematische Arbeiten (2.4.2004)

(1) *(Kurvendiskussion)* Eine Polynomfunktion p vierten Grades ist symmetrisch um die y–Achse (d.h. $p(-x) = p(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$) und besitzt bei $W = (1, 3)$ einen Wendepunkt. Die Steigung der Tangente in W ist $k_W = 2$.
  (a) Bestimme die Funktionsgleichung von p. (4 Punkte)
  (b) Ermittle alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte von p. (2 Punkte)
  (c) Berechne alle Nullstellen. (2 Punkte)
  (d) Ermittle den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das von p und der $x - \mathit{Achse}$ eingeschlossen wird. (2 Punkte)

(2) (a) *(Analytische Geometrie)* Bestimme die Lagebeziehung der drei Ebenen

$$\begin{aligned} \varepsilon_1: &\quad -12x_1 + 8x_2 + 7x_3 = -17 \\ \varepsilon_2: &\quad 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 14 \\ \varepsilon_3: &\quad 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 9 \end{aligned}$$

(5 Punkte)

(b) *(Gleichung)* Bestimme die Nullstellen von

$$4\tan^2 x + 12\tan x + 8.$$

(5 Punkte)

(3) (a) *(Ordnung und Schranken)* Wir untersuchen $\mathbb{Q}$ mit der natürlichen Ordnungsrelation $\leq$. Sind die folgenden Teilmengen von $\mathbb{Q}$ nach oben, bzw. unten beschränkt? Wenn ja, gib Infimum bzw. Supremum und Minimum bzw. Maximum an, sofern sie existieren.

$$(-3, 12], \quad (-\infty, 2) \cap [3, \infty), \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} [\tfrac{1}{\sqrt{n}}, n], \quad \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}.$$

(5 Punkte)

(b) *(Vollständige Induktion)* Schreibe die unten angegebene Identität in Summennotation um und beweise sie mittels vollständiger Induktion.

$$-2 + 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (3n - 2) = \frac{(1 + n)(3n - 4)}{2}$$

(4 Punkte)

(4) (a) *(Abbildungen)* Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Definiere die Begriffe *injektiv*, *surjektiv* und *bijektiv*.
Gib eine surjektive aber nicht injektive Funktion $f_1 : A_1 \to B_1$ an, wobei A_1 und B_1 geeignete Teilmengen von $\mathbb{R}$ seien. (5 Punkte)

(b) *(Logik)* Bestimme die disjunktive Normalform der NAND-Operation. (2 Punkte)

(c) *(Algebra)* Untersuche, ob die Menge

$$K := \{a + b\sqrt{6} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist. (4 Punkte)