1 Primzahlen und Teilbarkeit

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit Primzahlen und dafür wiederholen wir einige Begriffe, die vielen schon aus der Schule bekannt sein werden.

1.1 Teilbarkeit

Seien a und b ganze Zahlen, wir schreiben dafür a, $b \in \mathbb{Z}$.

Definition 1.1 (Teilbarkeit)**.**
Seien a, $b \in \mathbb{Z}$, dann sagen wir a *teilt* b, wenn ein $q \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $b = a \cdot q$. Dafür schreiben wir $a \mid b$.

Wenn $b = a \cdot q$, dann nennen wir a einen *Teiler* von b und q den *Komplementärteiler* von b zu a. Ist a kein Teiler von b so schreiben wir $a \nmid b$.

Beispiel 1.2.

1. $4 \mid 12$, da $12 = 3 \cdot 4$. Der Komplementärteiler von 12 zu 4 ist 3. Die Menge der Teiler von 12 ist gegeben durch $\{1, (-1), 2, (-2), 3, (-3), 4, (-4), 6, (-6), 12, (-12)\}$
2. $4 \nmid 11$, denn sonst müsste für $q \in \mathbb{Z}$ gelten, dass $11 = q \cdot 4$. Dies können wir umformen zu $q = \frac{11}{4}$ und somit ist q offensichtlich keine ganze Zahl.

Bemerkung.
Eine Zahl $b \in \mathbb{Z}$ hat immer $\{1, (-1), b, (-b)\}$ als Teiler. Ist a ein Teiler von b der nicht in dieser Menge enthalten ist, so sprechen wir von einem *echten Teiler* von b.
Jedes $a \in \mathbb{Z}$ teilt 0, denn $0 = a \cdot 0$.
Ist $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ und $a \mid b$, dann gilt $|a| \leq |b|$.

Satz 1.3 (Teilbarkeitsregeln)**.**
Sei $n \in \mathbb{N}$ *mit der Darstellung* $n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots a_1 \cdot 10 + a_0$.
(zum Beispiel: $54321 = 5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1$*), dann gilt:*

1. $2 \mid n \Leftrightarrow 2 \mid a_0$*, dass heißt* 2 *teilt* n *genau dann, wenn* 2 *die „Einerstelle“von* n *teilt.*
2. $3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid (a_k + \ldots a_1 + a_0)$*, das heißt* 3 *teilt* n *genau dann, wenn* 3 *die Ziffernsumme von* n *teilt.*
3. $4 \mid n \Leftrightarrow 4 \mid (a_1 \cdot 10 + a_0)$
4. $5 \mid n \Leftrightarrow 5 \mid a_0$
5. $8 \mid n \Leftrightarrow 8 \mid (a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0)$
6. $9 \mid n \Leftrightarrow 9 \mid (a_k + \ldots a_1 + a_0)$
7. $10 \mid n \Leftrightarrow a_0 = 0$
8. $11 \mid n \Leftrightarrow 11 \mid ((-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \cdots - a_1 + a_0)$

Beispiel 1.4.
$n = 2376$, dann gilt: $2 \mid n$, $3 \mid n$, $4 \mid n$, $5 \nmid n$, $6 \mid n$, $7 \nmid n$, $8 \mid n$, $9 \mid n$, $11 \mid n$.

1.2 Größter gemeinsamer Teiler

Definition 1.5 (Gemeinsamer Teiler)**.**
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a, b \neq 0$. Ein $c \in \mathbb{Z}$ heißt gemeinsamer Teiler von a und b, wenn $c \mid a$ und $c \mid b$.

Zwei ganze Zahlen besitzen immer den gemeinsamen Teiler 1 und nach voriger Bemerkung ist die Menge der Teiler einer ganzen Zahl betragsmäßig nach oben beschränkt. Daher ist die Menge der gemeinsamen Teiler von $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ nicht leer und nach oben beschränkt.
Dies zeigt, dass ein größtes Element existiert, das wir den *größten gemeinsamen Teiler* nennen und mit $\mathrm{ggT}(a, b)$ bezeichnen.

Beispiel 1.6.
Die Menge der gemeinsamen Teiler von 12 und (-18) ist $\{1, (-1), 2, (-2), 6, (-6)\}$ und daher ist $\mathrm{ggT}(12, -18) = 6$.

Satz 1.7.
Für $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *gilt:*

1. $ggT(a, b) = ggT(b, a)$
2. $ggT(a, b) \geq 1$
3. *Für jeden gemeinsamen Teiler* c *von* a *und* b *gilt* $c \mid ggT(a, b)$.

Ist $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, so nennen wir a und b *relativ prim* oder *teilerfremd*.

1.3 Kleinstes gemeinsames Vielfaches

Definition 1.8 (Vielfaches)**.**
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. b heißt *Vielfaches* von a, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $b = k \cdot a$, also wenn $a \mid b$.
Ein $c \in \mathbb{Z}$ heißt *gemeinsames Vielfaches* von $a, b \in \mathbb{Z}$, wenn c ein Vielfaches von a und b ist.

Sind $a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, dann ist die Menge der positiven, gemeinsamen Vielfachen von a und b nicht leer und nach unten beschränkt. Daher enthält diese Menge ein kleinstes Element g welches wir das *kleinste gemeinsame Vielfache* von a und b nennen, wir schreiben $\mathrm{kgV}(a, b)$.

Beispiel 1.9.

$$\mathrm{kgV}(7, 13) = 91 \qquad \mathrm{kgV}(-20, 100) = 100 \qquad \mathrm{kgV}(a, a^n) = a^n$$

1.4 Primzahlen

Definition 1.10 (Primzahl)**.**
Eine natürliche Zahl $p \geq 2$ heißt *Primzahl*, wenn sie keine echten Teiler besitzt, also die Menge der Teiler von p nur aus $\{1, (-1), p, (-p)\}$ besteht.

Die Menge der Primzahlen wird mit $\mathbb{P}$ bezeichnet und man kann zeigen, dass diese Menge unendlich ist. Jede Primzahl außer 2 ist ungerade, denn jede gerade Zahl ist durch 2 teilbar.

Satz 1.11 (Primfaktorenzerlegung)**.**
Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Dann kann n in bis auf die Reihenfolge eindeutiger Weise als Produkt von Primzahlen dargestellt werden. Das heißt es existieren $p_1, \dots p_k \in \mathbb{P}$: $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$.

Bemerkung.
Im obigen Satz können Primzahlen p_i, p_j auch gleich sein und daher schreibt man oft $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, wobei α_j die Vielfachheit der Primzahl p_j genannt wird.

Bemerkung (Finden von Primfaktorzerlegungen).
Um die Primfaktorzerlegung einer ganzen Zahl n zu finden, geht man am besten methodisch vor. Beginnend mit der niedrigsten Primzahl 2 überprüft man der Reihe nach welche Primzahlen n teilen und dividiert durch diese Primzahlen.

Beispiel 1.12.
Sei $n = 693$.
Nach den Teilbarkeitsregeln ist n nicht durch 2 teilbar. n ist jedoch durch 3 teilbar, da $6 + 9 + 3 = 18$ durch 3 teilbar ist, also $n = 3 \cdot 231$. Außerdem ist 231 durch 3 teilbar, daher $n = 3^2 \cdot 77$. Jedoch ist 77 nicht mehr durch 3 teilbar und auch nicht durch 5 teilbar, aber offensichtlich durch 7 teilbar.
Dadurch erhalten wir $n = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$ und da 11 eine Primzahl ist, haben wir die Primfaktorenzerlegung von n gefunden.

Bemerkung (Bestimmen des ggTs und kgVs).
Mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung kann man leicht den ggT von $a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ bestimmten. Der $\mathrm{ggT}(a, b)$ ist gegeben durch jene Primzahlen, die sowohl in der Zerlegung von a, als auch in der Zerlegung von b auftauchen. Das Produkt dieser Primzahlen zur niedrigsten vorkommenden Potenz ist dann der ggT von a und b.

Den kgV von zwei ganzen Zahlen berechnet man, indem man das Produkt aller Primzahlen (zur höchsten Potenz), die in der Zerlegung von a oder in der Zerlegung von b vorkommen, bildet.

Beispiel 1.13.
Sei $a = 72 = 2^3 \cdot 3^2$, $b = 60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$, dann gilt $\mathrm{ggT}(a, b) = 2^2 \cdot 3^1 = 12$.
Für das kgV bilden wir das Produkt der Primzahlen zur höchsten auftretenden Potenz, also $\mathrm{kgV}(a, b) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 360$.

Außerdem gilt folgende Formel:

$$|a| \cdot |b| = \mathrm{kgV}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(a, b)$$

Diese ist sehr hilfreich um aus dem ggT das kgV zu berechnen und umgekehrt.