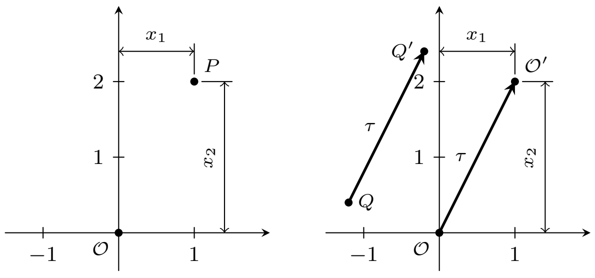
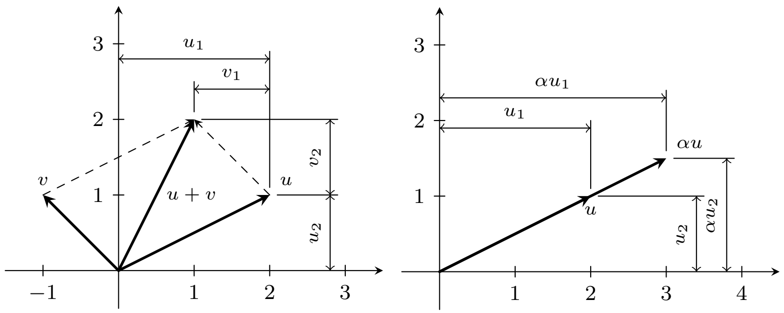


(a) Kartesische Koordinaten (b) Richtung einer Translation

Abbildung 1: Zwei Interpretationen des $\mathbb{R}^2$



(a) Addition (b) Skalare Multiplikation

Abbildung 2: Addition und skalare Multiplikation

4 Vektoren

4.1 Punkte und Translationen

Definition 4.1. Wir identifizieren die *Ebene* mit der Menge aller Punkte, die sich mit zwei Koordinaten beschreiben lassen. Dies entspricht

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

der Menge aller geordneten Zahlenpaare. Wir nennen ein Element $P = (x_1, x_2)$ der Ebene *Punkt* und x_1, x_2 seine *kartesischen Koordinaten*. Der Punkt $\mathcal{O} = (0, 0)$ heißt *Ursprung* (vgl. Abbildung 1.a).

Definition 4.2. Eine Abbildung, die jeden Punkt der Ebene in dieselbe Richtung um die gleiche Distanz verschiebt, nennt man *Translation*.

Wir können jede Translation dadurch charakterisieren, um welche Distanz sie die Punkte in x- und y-Richtung verschiebt. Dies bietet uns die Möglichkeit die Menge $\mathbb{R}^2$ auch als die Menge aller Translationen zu interpretieren (vgl. Abbildung 1.b).

Die formale Ähnlichkeit zwischen Punkten und Translationen erlaubt es uns, beim Rechnen nicht zwischen den beiden Konzepten unterscheiden zu müssen. Wir werden in diesem Fall von *Vektoren* sprechen.

Analog lassen sich Vektoren höherer Dimensionen definieren. Der *Raum* bzw. die Menge aller dreidimensionalen Translationen werden beispielsweise mit der Menge

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

identifiziert.

4.2 Elementare Vektoroperationen

Definition 4.3. Für $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ in $\mathbb{R}^2$ (bzw. $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$) definieren wir die *Vektoraddition* komponentenweise, d.h.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + u_2 \end{pmatrix} \quad \left(\text{bzw. } \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + u_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix} \right).$$

Die Vektoraddition lässt sich als Verknüpfung zweier Translationen interpretieren. Abbildung 2.a verdeutlicht diesen Zusammenhang.

Definition 4.4. Für einen Vektor (u_1, u_2) in $\mathbb{R}^2$ (bzw. $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$) und eine reelle Zahl α definieren wir die *skalare Multiplikation* komponentenweise, d.h.

$$\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix} \quad \left(\text{bzw. } \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \alpha u_3 \end{pmatrix} \right).$$

Die skalare Multiplikation streckt ($|\alpha| \geq 1$) bzw. staucht ($|\alpha| < 1$) einen Vektor (vgl. Abb. 2.b). Eine skalare Multiplikation mit einem α kleiner null dreht die Orientierung eines Vektors um. Zwei Vektoren u und v sind *parallel* zueinander, wenn es eine reelle Zahl α gibt, sodass $u = \alpha v$.

Die *Vektorsubtraktion* ist definiert durch:

$$u - v := u + (-1)v.$$

Um den Vektor $\overrightarrow{AB}$ von Punkt A nach Punkt B zu bestimmen, verwenden wir die Regel *Spitze* − *Schaft*, d.h.

$$\overrightarrow{AB} = B - A.$$

4.3 Norm und inneres Produkt

Die Länge eines Vektors können wir mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes berechnen (vgl. Abb. 1.a).

Definition 4.5. 1. Wir nennen die Länge des Vektors $u = (u_1, u_2)$ (bzw. $v = (v_1, v_2, v_3)$) *Norm* von u (bzw. v) und schreiben

$$||u|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad \left(\text{bzw. } ||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\right).$$

2. Ein Vektor v mit der Eigenschaft $||v|| = 1$ heißt *normiert.*

Zu jedem Vektor $v \neq \mathcal{O}$ ist $v^* = \frac{1}{||v||}v$ normiert und parallel zu v.

Definition 4.6. Für zwei Vektoren $t = (t_1, t_2)$ und $u = (u_1, u_2)$ (bzw. $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3)$) definieren wir das *innere Produkt* durch

$$\langle t, u\rangle := t_1u_1 + t_2u_2 \quad (\text{bzw. } \langle v, w\rangle := v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)\,.$$

Aus der Definition von Norm und innerem Produkt erhält man direkt den Zusammenhang

$$\langle v, v\rangle = ||v||^2.$$

Ohne Beweis bemerken wir die folgenden Eigenschaften des inneren Produkts für drei Vektoren t, u, v, die reelle Zahl α und den Winkel $\angle(u, v)$ zwischen u und v

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &= \langle v, u\rangle, \\
\langle t + u, v\rangle &= \langle t, v\rangle + \langle u, v\rangle, \\
\langle \alpha u, v\rangle &= \alpha\langle u, v\rangle \text{ und daher} \\
||\alpha u|| &= |\alpha|\,||u|| \text{ sowie} \\
\langle u, v\rangle &= ||u||\,||v|| \cos(\angle(u, v)).
\end{aligned}$$

Das innere Produkt kann demnach dazu verwendet werden, den Winkel zwischen zwei Vektoren zu bestimmen.
$\|u\|\,||v|| \cos(\angle(u, v))$ ist genau dann null, wenn entweder $\|u\| = 0$ gilt, $\|v\| = 0$ gilt oder $cos(\angle(u, v)) = 0$ gilt. $\|u\| = 0$ gilt genau dann, wenn $u = \mathcal{O}$. Dasselbe gilt für $\|v\| = 0$. Für $0 \leq \varphi \leq \Pi$ gilt $cos(\varphi) = 0$ nur für $\varphi = \frac{\Pi}{2}$. Das innere Produkt zweier Vektoren ist also genau dann null, wenn sie orthogonal aufeinander stehen oder einer der beiden Vektoren $\mathcal{O}$ entspricht.

Geometrisch lässt sich das innere Produkt zweier Vektoren u und v als eine verzerrte Projektion von u auf v interpretieren.

Einen Vektor $\bar{u}$, der auf $u = (u_1, u_2)$ orthogonal steht und die gleiche Norm wie u hat, bestimmt man mit der *Linkskippregel.* Sie besagt $\bar{u} = (-u_2, u_1)$.

4.4 Kreuzprodukt

Als letzte Vektoroperation lernen wir das Kreuzprodukt kennen.

Definition 4.7. Für zwei dreidimensionale Vektoren $u = (u_1, u_2, u_3)$ und $v = (v_1, v_2, v_3)$ definieren wir das *Kreuzprodukt* wie folgt:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen an dieser Stelle zwei besonders praktische Eigenschaften des Kreuzprodukts herausgreifen:

- Der Vektor $u \times v$ steht sowohl auf u als auch auf v orthogonal.
- Die Norm $||u \times v||$ entspricht dem Flächeninhalt des von u und v aufgespannten Parallelogramms (vgl. Abb. 2.a).