19. (a) Bestimme mit dem Siebverfahren alle Primzahlen kleinergleich 50.

(b) Überlege, warum man das Siebverfahren nur für alle Primzahlen $\leq \sqrt{n}$ anwenden muss.

20. Zeige: $n! + k$ ist keine Primzahl für $2 \leq k \leq n$ ($n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$).
(Es gibt also beliebig große Lücken zwischen zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen.)

21. (a) Zeige: Falls $2^m + 1$ eine Primzahl ist, dann gilt $m = 2^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (d.h. m enthält keinen ungeraden Faktor).

(b) Zeige: Falls $2^n - 1$ eine Primzahl ist, dann ist auch n eine Primzahl.

22. Zeige mit vollständiger Induktion, dass sich jede ganze Zahl ungleich 0 als Produkt von Primzahlen darstellen lässt.

23. Zeige für $a = 2^3 3^2 5^4$, dass es keine andere Darstellung der Form $2^r 3^s 5^t p^u$, $p > 5$ gibt.

24. Bestimme die Ordnung von $p = 2, 3, 5$ für alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ mit $0 \leq k \leq n \leq 5$.

25. Auf wieviele Nullen endet $100! = 100 \cdot 99 \cdots 1$?

26. Das Fundamentaltheorem (“$p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ oder $p \mid b$”) ist mit Theorem 1 (eindeutige Primfaktorzerlegung) äquivalent.
Zeige die Richtung “Theorem 1 $\Rightarrow$ Fundamentaltheorem”.

27. Seien $a = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{a(p)}$, $b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{b(p)}$ natürliche Zahlen.

(a) Zeige: $a | b \Leftrightarrow a(p) \leq b(p) \quad \forall p \in \mathcal{P}$.

(b) Zeige: $(a, b) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\{a(p), b(p)\}}$.

28. Bestimme $(6, 8)$, $(6, -8)$, $(54, 36)$, $(14, 25)$, und $(3906, 1162)$.

29. Wende den Euklidischen Algorithmus an:
a) $a = 20, b = 13$ b) $a = 17, b = 7$ c) $a = 1953, b = 581$

30. Wende den Euklidischen Algorithmus an:
a) $a = 20/13, b = 1$ b) $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, b = 1$
Überlege warum $\frac{20}{13}$ nahe bei $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist.