41. Berechne jeweils den ggT in $\mathbb{Z}[i]$ sowohl mit dem Euklidischen Algorithmus als auch mit der Primfaktorzerlegung:

(a) $\text{ggT}(30 + 16i, 5 + 3i)$,

(b) $\text{ggT}(102 + 51i, 60 + 15i)$.

42. Zeige, dass $\sqrt{2} = [1; 222\ldots] = [1; \dot{2}]$ und bestimme $[1; \dot{3}]$ und $[1; \dot{c}]$.

43. (a) Zeige für p prim und $0 < k < p$, dass $p \mid \binom{p}{k}$.

(b) Zeige mit vollständiger Induktion den kleinen Satz von Fermat: $p \mid a^p - a$ für alle $p \in \mathcal{P}$, $a \in \mathbb{N}$ (sogar $\mathbb{Z}$). Vergleiche Übung **1**.

44. Zeige: In $\mathbb{Q}[x]$ gilt $x^m - 1 \mid x^n - 1$ genau dann, wenn $m \mid n$ (vgl. Übung **15**).

45. (a) Es sei $f \in K[X]$. Zeige: $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (X - \alpha)|f$.

(b) Zeige, dass die irreduziblen Elemente von $\mathbb{C}[X]$ genau die Polynome vom Grad 1 sind.

46. Finde eine Zerlegung von $f \in \mathbb{R}[X]$ in irreduzible Polynome:
a) $f(X) = (X^4 - 1)^2(X^3 - 1)$ b) $f(X) = X^5 - 1$ c) $f(X) = X^4 + 1$

47. Zeige: In einem Integritätsbereich folgt aus prim stets irreduzibel.

48. Berechne den ggT sowohl mit der Primfaktorzerlegung in einem geeigneten Polynomring als auch mit dem Euklidischen Algorithmus: $\text{ggT}(4x^4 + 1, 2x^3 - x + 1)$.

49. Es seien $f, g \in \mathbb{Q}[X]$. Zeige: Aus $(f, g) = 1$ folgt, dass $\nexists \alpha \in \mathbb{C}$, sodass $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$.
Gilt auch die Umkehrung?

50. Zeige: $X^4 + 1$ ist über $\mathbb{Q}$ irreduzibel.

51. Seien $x, y, a, b \in \mathbb{Z}$. Zeige folgende Identität (die schon Diophant bekannt war):

$$(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = (xa \pm yb)^2 + (xb \pm ya)^2.$$

Was ergibt sich daraus für Übung **5**?

52. Bestimme die Einheiten des Ringes $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.