

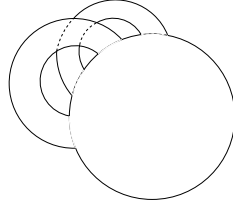
BEVEZETÉS A TOPOLOGIÁBA

2. gyakorlat, 2009. február 18.

Vértesi Vera <wera@szit.bme.hu>

<http://www.szit.bme.hu/~wera>

1. Milyen felületet ábrázol az alábbi ábra? (*Segítség:* Mi a határa a felületnek?)



2. Adjunk hasonló ábrát a síkban az $A_p - \{\text{körlap}\}$ felületekhez is!
3. Simítsd ki a fenti ábra határát, és utána számítsd ki az érintőjének a körülfordulási számát! Mennyi a körülfordulási száma a 2. feladatban kapott felületek határának érintővektorainak?
4. Bizonyítsd be, hogy ha a fenti ábrán (illetve a 2. feladatban kapott felületeken) adott egy sehohsem nulla vektormező, akkor annak a körülfordulási száma a peremen 0. (*Segítség:* Bontsd kis háromszögekre a felületet.)

Definíció: Egy γ görbe menti u, v vektormezők relatív körülfordulási száma: $I_\gamma(u) - I_\gamma(v)$

5. Az előző példásor 6. feladatához hasonlóan adj egyszerű képletet a relatív körülfordulási számra!

Legyen adva a síkban egy körgyűrű, és a középköre mentén két vektormező (azaz a középgörbe minden pontjában egy-egy vektor). A körgyűrű folytonos deformálása során ezen vektorok is mozognak. Mozgassuk a gyűrűt a háromdimenziós térben (a deformáció során a körgyűrűnek lehetnek önmetszései), majd újra beleterítve a síkba egy zárt (esetleg önmagát metsző) szalagot kapunk, rajta két vektormezőt a szalag középgörbéje mentén.

6. Az 5. feladat segítségével bizonyítsd be, hogy a fenti eljárás során nem változik a relatív körülfordulási szám!

Legyen v egy vektormező az A_p felület mentén véges sok nullhellyel, ekkor minden nullhely egy kis környezetét kihagyva egy felületet kapunk, melynek pereme körvonalakból áll.

Poincaré–Hopf Tétel: A határgörbék menti körülfordulási számok összege mindig $2 - 2p$.

Bizonyítás: Foglaljuk bele az kihagyott környezeteket egy D körlapba. (Hogyan lehet ezt megcsinálni?). Képzeld meg, hogy az egész D a síkba van lapítva, ekkor az előző példásor 10. feladata szerint azt kell belátnunk, hogy D peremén $\gamma = \partial D$ -án v körülfordulási szám $2p - 2$, vagy másképpen fogalmazva azt kell belátni, hogy v és γ érintőjének a relatív körülfordulási száma $2p - 1$. Hagyjuk el a felületből D -t, és terítsük ki a maradékot a síkba, mint a 2. feladatban, és alkalmazzuk a 5, majd a 3. és a 4. feladat eredményét.

7. Létezik-e S^2 -n érintő egyenesmező?
8. (Sonkásszendvics probléma) Adott a síkon két síkidom, van-e olyan egyenes, mely mindkettő területét felezi?
9. (3-dimenziós sonkásszendvics probléma) Adott a térben három test, van-e olyan sík, mely mindhárom térfogatát felezi?
10. Létezik-e folytonos $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ekvivariáns leképezés ($f(-x) = -f(x)$)?