Azonosságok félcsoportokban

Vértesi Vera

Témavezető: Szabó Csaba

Országos Tudományos Diákköri Konferencia, 2005

A szóprobléma

$\mathbf{A}$ algebra

- $\mathrm{TERM\text{-}EQ}(\mathbf{A}): \boldsymbol{t \equiv s}$

  Pl. $\boldsymbol{x^p} \stackrel{?}{\equiv} \boldsymbol{x}$ $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{p}}$ felett — kis Fermat-tétel

- $\mathrm{POL\text{-}EQ}(\mathbf{A}): \boldsymbol{p \equiv q}$

  Pl. $\boldsymbol{x_1(1\ 2\ 3)x_2} \stackrel{?}{\equiv} \boldsymbol{x_2(1\ 2)}$ $\boldsymbol{S_3}$-ban

  $\boldsymbol{x_1 = 1, x_2 = 1}$ esetén $\neq$

$\mathrm{POL\text{-}EQ}(\mathbf{A})$ könnyű $\Rightarrow$ $\mathrm{TERM\text{-}EQ}(\boldsymbol{A})$ könnyű

$\mathrm{TERM\text{-}EQ}(\mathbf{A})$ nehéz $\Rightarrow$ $\mathrm{POL\text{-}EQ}(\boldsymbol{A})$ nehéz

Előzmények

- Tétel: *Seif S.*, *Szabó Cs.* (1997)
  S kombinatorikus 0-egyszerű félcsoportra
  1. $\mathrm{POL\text{-}EQ}(S) \iff \mathrm{CSP}$
  2. $\mathrm{TERM\text{-}EQ}(S)$ P-beli
- Tétel: *Volkov M.* (2002)
  $\approx \mathbf{2^{1700}}$ elemű S félcsoport, amelyre $\mathrm{TERM\text{-}EQ}(S)$ coNP-teljes
- Tétel: *Kisielewicz A.* (2002)
  $\leq$ néhány ezer elemszámú S félcsoport, amelyre $\mathrm{TERM\text{-}EQ}(S)$ coNP-teljes.
- Tétel: *Klima* (2003)
  Van 5 elemű B_2^1 félcsoport, amelyre $\mathrm{TERM\text{-}EQ}(B_2^1)$ coNP-teljes.

0-egyszerű félcsoportok

G véges csoport

Legyen M egy $G \cup \{0\}$ mátrix.

Λ – a sorindexek halmaza.

I – az oszlopindexek halmaza

$$S_{\mathrm{M}} := \{\langle i, g, \lambda\rangle : i \in I, g \in G, \lambda \in \Lambda\} \cup \{0\}$$

Szorzás:

$$\langle i, g, \lambda\rangle\langle j, h, \mu\rangle = \begin{cases} \langle i, g\mathrm{M}(\lambda, j)h, \mu\rangle, & \text{ha } \mathrm{M}(\lambda, j) \in G \\ 0, & \text{ha } \mathrm{M}(\lambda, j) = 0 \end{cases}$$

és

$$0 \cdot s = 0 = s \cdot 0 \qquad \forall s \in S_{\mathrm{M}}$$

Példa

Pl. $Z_2 = \langle a \rangle$

$$M := \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

itt $\Lambda = I = \{1, 2, 3\}$

$$\langle 2, 1, \underbrace{1 \rangle \langle 2}_{M(1,2)=a}, a, 3 \rangle = \langle 2, 1 \cdot a \cdot a, 3 \rangle = \langle 2, 1, 3 \rangle$$

$$\langle i, g, \lambda \rangle \langle j, h, \mu \rangle = 0 \iff \lambda = j$$

Szendvicsmátrix

G véges csoport

Legyen $\mathrm{M} \in (G \cup \{0\})^{n \times m}$ mátrix.

$S_M = \{\leq 1$ G-beli elemet tartalmazó $m \times n$-es mátrixok$\}$

Szorzás: $N, P \in S_M$

$$N \circ P = NMP$$

Pl.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle 2, 1, 1 \rangle \cdot \langle 2, a, 3 \rangle = \langle 2, 1, 3 \rangle$$

Kombinatorikus 0-egyszerű félcsoportok

$G = \{\mathbf{1}\}$

M egy 0–1 mátrix

$\boldsymbol{\Lambda}$ – a sorindexek, $\boldsymbol{I}$ – az oszlopindexek

$$S_{\mathrm{M}} := \{\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{\lambda} \rangle : \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

Szorzás:

$$\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{\lambda} \rangle \langle \boldsymbol{j}, \boldsymbol{\mu} \rangle = \begin{cases} \langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{\mu} \rangle, & \text{ha } \mathrm{M}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{j}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{0}, & \text{ha } \mathrm{M}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{j}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

Tétel: *Seif S.*, *Szabó Cs.* (1997)

$\boldsymbol{S}$ kombinatorikus 0-egyszerű félcsoportra $\mathrm{TERM\text{-}EQ}(\boldsymbol{S})$ P-beli.

Néhány 0-egyszerű félcsoport

Áll. M egy sorát vagy oszlopát egy csoportelemmel szorozva izomorf 0-egyszerű félcsoportot kapunk

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{h} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{g_1} & \boldsymbol{g_2} \\ \boldsymbol{g_4} & \mathbf{0} & \boldsymbol{g_3} \\ \boldsymbol{g_5} & \boldsymbol{g_6} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Néhány 0-egyszerű félcsoport

Áll. M egy sorát vagy oszlopát egy csoportelemmel szorozva izomorf 0-egyszerű félcsoportot kapunk

$$\begin{pmatrix} 0 & g \\ h & k \end{pmatrix} \leftarrow k^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_4 & 0 & g_3 \\ g_5 & g_6 & 0 \end{pmatrix}$$

Néhány 0-egyszerű félcsoport

Áll. M egy sorát vagy oszlopát egy csoportelemmel szorozva izomorf 0-egyszerű félcsoportot kapunk

$$\begin{pmatrix} 0 & g \\ h' & 1 \end{pmatrix} \leftarrow g^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_4 & 0 & g_3 \\ g_5 & g_6 & 0 \end{pmatrix}$$

Néhány 0-egyszerű félcsoport

Áll. M egy sorát vagy oszlopát egy csoportelemmel szorozva izomorf 0-egyszerű félcsoportot kapunk

$$\begin{array}{c} h'^{-1} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ h' & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_4 & 0 & g_3 \\ g_5 & g_6 & 0 \end{pmatrix}$$

Néhány 0-egyszerű félcsoport

Áll. M egy sorát vagy oszlopát egy csoportelemmel szorozva izomorf 0-egyszerű félcsoportot kapunk

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{g_1} & \boldsymbol{g_2} \\ \boldsymbol{g_4} & \mathbf{0} & \boldsymbol{g_3} \\ \boldsymbol{g_5} & \boldsymbol{g_6} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Néhány 0-egyszerű félcsoport

Áll. M egy sorát vagy oszlopát egy csoportelemmel szorozva izomorf 0-egyszerű félcsoportot kapunk

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g_5^{-1} & & \\ \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & g_1 & g_2 \\ g_4 & \mathbf{0} & g_3 \\ g_5 & g_6 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array}$$

Néhány 0-egyszerű félcsoport

Áll. M egy sorát vagy oszlopát egy csoportelemmel szorozva izomorf 0-egyszerű félcsoportot kapunk

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{g_1} & \boldsymbol{g_2} \\ \boldsymbol{g_4'} & \mathbf{0} & \boldsymbol{g_3} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{g_6} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \longleftarrow \boldsymbol{g_4'}^{-1}$$

Néhány 0-egyszerű félcsoport

Áll. M egy sorát vagy oszlopát egy csoportelemmel szorozva izomorf 0-egyszerű félcsoportot kapunk

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & {g'_3}^{-1} \\ & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & g_1 & g_2 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & g'_3 \\ \mathbf{1} & g_6 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array}$$

Néhány 0-egyszerű félcsoport

Áll. M egy sorát vagy oszlopát egy csoportelemmel szorozva izomorf 0-egyszerű félcsoportot kapunk

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{g_1} & \boldsymbol{g_2'} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{g_6} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \leftarrow \boldsymbol{g_2'}^{-1}$$

Néhány 0-egyszerű félcsoport

Áll. M egy sorát vagy oszlopát egy csoportelemmel szorozva izomorf 0-egyszerű félcsoportot kapunk

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{g_6}^{-1} \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{g_1'} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{g_6} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Néhány 0-egyszerű félcsoport

Áll. M egy sorát vagy oszlopát egy csoportelemmel szorozva izomorf 0-egyszerű félcsoportot kapunk

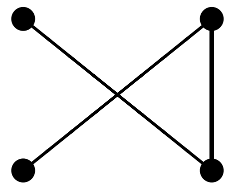
$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{g} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

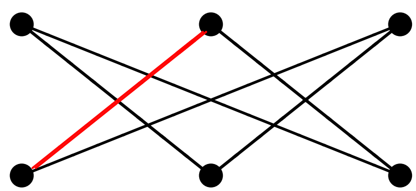
Néhány 0-egyszerű félcsoport

Áll. M egy sorát vagy oszlopát egy csoportelemmel szorozva izomorf 0-egyszerű félcsoportot kapunk

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{g} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$



Az első érdekes eset

Kérdés: (*Volkov M.*)

$Z_2 = \langle a \rangle$

$$M := \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle 1, a, 1\rangle\langle 2, a, 2\rangle\langle 1, 1, 1\rangle\langle 3, a, 1\rangle\langle 2, 1, 2\rangle = \langle 1, a, 2\rangle$$

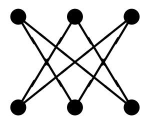
$M(1, 2) = a$ $\qquad$ $M(1, 2) = a$

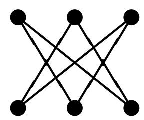
Páros homomorfizmus probléma (2HOM)

Adott: H véges páros gráf

Bemenet: G véges páros gráf

Kérdés: $\forall \varphi : G \to H$ homomorfizmusnál $2 \mid |\varphi^{-1}(e)|$

Lemma: 2HOM() $\overset{\text{poly}}{\Longleftrightarrow}$ TERM-EQ(S_M)

Lemma: 2HOM() coNP-teljes.

Tétel: TERM-EQ(S_M) coNP-teljes.