A tagsági probléma hipergráfalgebrákban

Vértesi Vera

Témavezető: Szabó Csaba

Országos Tudományos Diákköri Konferencia, 2005

A tagsági probléma

Adott: egy $\mathcal{V} = \mathrm{Var}(\mathbf{A})$ varietás,
ahol $\mathbf{A}$ véges és véges típusú algebra

$$|\mathbf{A}| = m$$

Bemenet: egy véges $\mathbf{B}$ algebra.

$$|\mathbf{B}| = n$$

Kérdés: $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ által generált varietásban van?

$$\mathbf{B} \overset{?}{\in} \mathrm{Var}(\mathbf{A})$$

Példa

$\boldsymbol{\tau} = \langle \mathbf{1}, {}^{-1}, \cdot \rangle$

Áll.: $\mathbf{A}$ véges Abel-csoport

$\mathbf{B} \in \mathrm{Var}(\mathbf{A})$, véges $\iff$ $\mathbf{B}$ véges Abel-csoport és

$\mathbf{exp}\,\mathbf{B} \mid \mathbf{exp}\,\mathbf{A}$

Biz. $\Longrightarrow$

- direkt szorzatra $\surd$
- részalgebrára $\surd$
- homomorf képre $\surd$

$\Longleftarrow$

$\mathbf{B} = \mathbb{Z}_{p^\alpha} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{q^\beta}$

$\mathbb{Z}_{p^\alpha} \in \mathrm{Var}(\mathbf{A})$ ha $p^\alpha \mid \mathbf{exp}\,\mathbf{A}$

$\square$

$\mathrm{Var}(\mathbf{A})$ azonosságbázisa:

$$x^{\mathbf{exp}\,\mathbf{A}} \equiv 1$$
$$x \cdot 1 \equiv 1 \cdot x \equiv x$$
$$x \cdot x^{-1} \equiv x^{-1} \cdot x \equiv 1$$
$$x \cdot (y \cdot z) \equiv (x \cdot y) \cdot z$$
$$x \cdot y \equiv y \cdot x$$

Módszer: azonosságok ellenőrzése

$\mathbf{B} \in \mathrm{Var}(\mathbf{A}) \iff \mathbf{B}$-ben teljesül az összes $\mathbf{A}$-beli azonosság

elég csak n változós azonosságokat nézni

Sőt: $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n) =$ szavak ekvivalenciaosztálya

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ reprezentánsrendszer ($k \leq m^{m^n}$)

az ellenőrizendő azonosságok:

$$f(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_r}) \equiv t \qquad t_{i_j}, t \in T,\ f \text{ alapművelet}$$

Def. $\mathbf{A}$ *véges bázisú*, ha az $\mathbf{A}$-ban teljesülő összes azonosság következik véges sok $\mathbf{A}$-beli azonosságból.

Ha $\mathbf{A}$ véges bázisú $\Longrightarrow$ polinomiális algoritmus

Végesbázis-probléma

- *Lyndon, 1951* minden 2 elemű algebra végesbázisú
- *Oates, Powell, 1965* minden véges csoport végesbázisú
- *Kruse, Lvov, 1973* minden véges gyűrű végesbázisú
- *McKenzie, 1970* minden véges háló végesbázisú
- *Lyndon, Visir, Perkins, 1954, 1961, 1968* vannak nemvéges bázisú algebrák
- *Murskǐ, 1965* van 3 elemű nemvéges bázisú algebra

A β-függvény

$\mathcal{V} = \mathrm{Var}(\mathbf{A})$

$$\boldsymbol{\beta} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{n}) = \min\{\boldsymbol{k} : |\mathbf{B}| \leq \boldsymbol{n}, \mathbf{B} \in \mathcal{V}$ eldöntéséhez elegendő a legfeljebb $\boldsymbol{k}$ hosszú azonosságokat ellenőrizni$\}$

$= \max\{\boldsymbol{l} : \exists \mathbf{C} \notin \mathcal{V}, |\mathbf{C}| \leq \boldsymbol{n}, \mathbf{C}$ teljesít minden legfeljebb $\boldsymbol{l}$ hosszú $\mathbf{A}$-ban teljesülő azonosságot$\} + \mathbf{1}$

$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathcal{V}}^{[\boldsymbol{k}]}$: a $\mathcal{V}$-ben teljesülő, legfeljebb $\boldsymbol{k}$-hosszú azonosságok

$\mathcal{V}^{\boldsymbol{k}}$: $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathcal{V}}^{[\boldsymbol{k}]}$ azonosságok által definiált varietás

$$\mathbf{B} \in \mathcal{V} \iff \mathbf{B} \models \boldsymbol{\Sigma}_{\mathcal{V}}^{[\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{n})]}$$

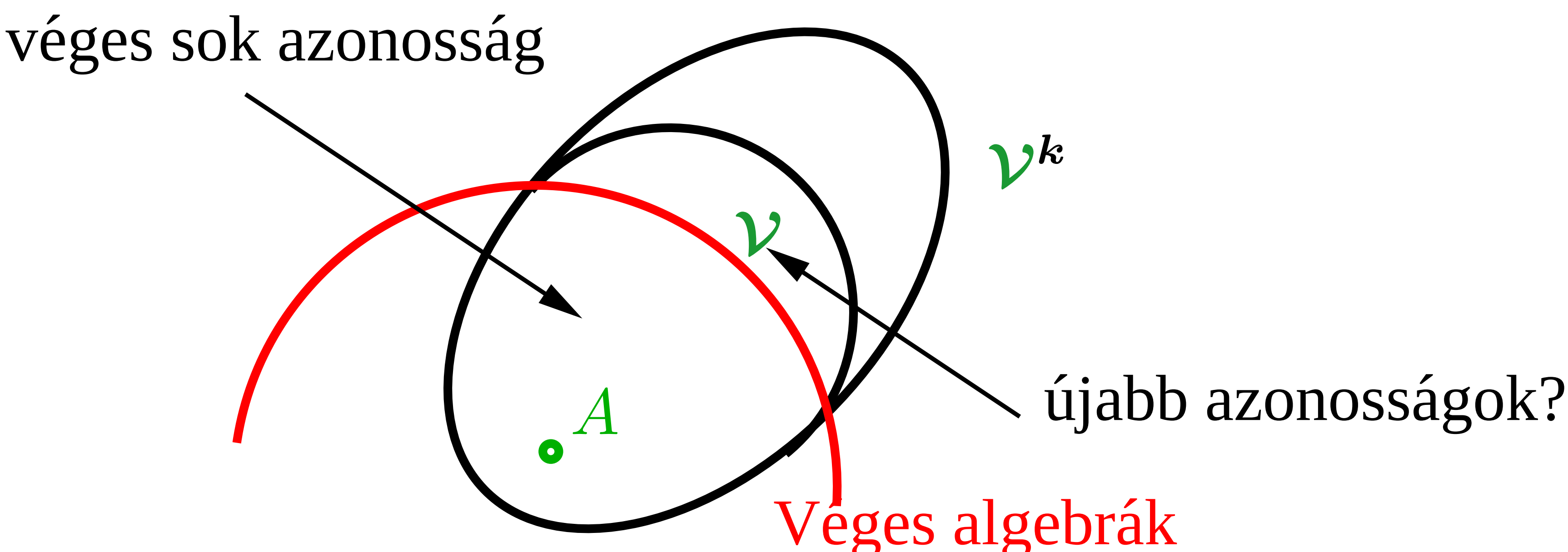
Összefüggések

$\mathcal{V}$ véges bázisú $\underset{\overset{?}{\Longleftarrow}}{\Longrightarrow}$ β véges

β véges $\Longrightarrow$ $\mathcal{V}$ véges bázisú

vagy

$\mathcal{V}$ öröklődően nemvéges bázisú



Ilyen példa nem ismert.

Korábbi eredmények

Áll.: (*McNulty*) A β-függvény létezik és rekurzív.

Áll.: A β függvény legfeljebb triplaexponenciális.

Ismert: $\mathbf{A}$ véges bázisú $\implies$ β véges

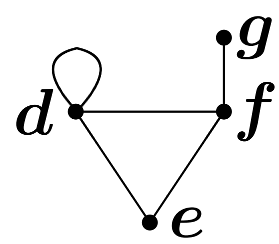
Pl. (*Székely*) Van olyan algebra, amelyre a β-függvény legalább szublineáris.

Konstrukció (*Vértesi*) Tetszőleges k-ra van olyan algebra, amelyre $\beta(n) \geq \mathcal{O}(n^k)$.

Tétel: A β függvényre nincs polinomiális felső korlát.

Gráfalgebrák (C. Shallon, 1979)

$\mathbf{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ *gráf*, $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{V}^2$



$\mathbf{A_G}(\overbrace{\boldsymbol{V} \cup \{\mathbf{0}\}}^{\boldsymbol{A}_{\mathbf{G}}}, \cdot)$ *gráfalgebra:*

$\mathbf{0} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \begin{cases} \boldsymbol{x}, & \text{ha } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{E} \\ \mathbf{0} & \text{egyébként} \end{cases}$$

$\cdot$	d	e	f	g	0
d	d	d	d	0	0
e	e	0	e	0	0
f	f	f	0	f	0
g	0	0	g	0	0
0	0	0	0	0	0

Hipergráfalgebrák

Gráfalgebrák általánosításai:

$\mathbf{R}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\alpha})$ *relációs struktúra / hipergráf*, $\boldsymbol{\alpha} \subseteq \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{k}}$

$\mathbf{A}_{\mathbf{R}}(\overbrace{\boldsymbol{R} \cup \{\mathbf{0}\}}^{\boldsymbol{A}_{\mathbf{R}}}, \boldsymbol{f})$ *hipergráfalgebra:*

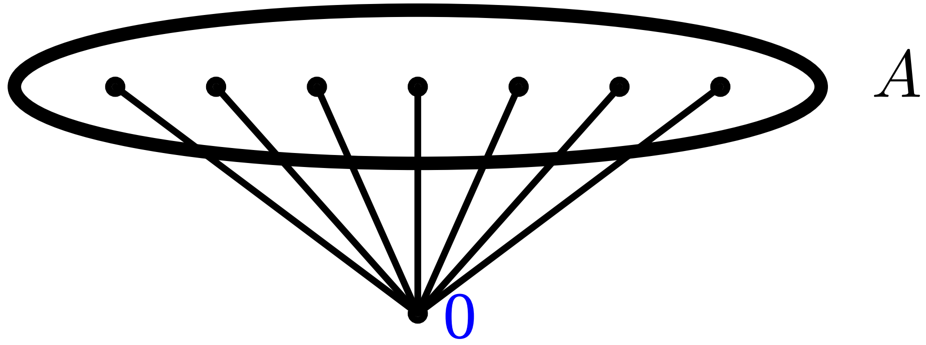
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}) = \begin{cases} \boldsymbol{x}_1, & \text{ha } \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}} \in \boldsymbol{R} \text{ és } (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}) \in \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & \text{egyébként} \end{cases}$$

Lapos félhálók

$\mathbf{A}$ tetszőleges algebra

Új művelet: $\wedge$

$$x \wedge y = \begin{cases} x, & \text{ha } x = y \\ \mathbf{0} & \text{egyébként} \end{cases}$$



lapos félhálóművelet

$$\mathbf{F_G}(\overbrace{V \cup \{\mathbf{0}\}}^{F_{\mathrm{G}}}, \cdot, \wedge) \text{ *lapos gráfalgebra*}$$

$$x \cdot y = \begin{cases} x, & \text{ha } (x, y) \in E \\ \mathbf{0} & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$\mathbf{F_R}(\overbrace{R \cup \{\mathbf{0}\}}^{F_{\mathrm{R}}}, f, \wedge) \text{ *lapos hipergráfalgebra*}$$

β-függvény lapos hipergráfalgebrákra

Konstruálunk univerzális r-színezhető hipergráfokat: $\mathbf{G}_{r,k}$

Tétel: (*Toft, 1978*) Van n-csúcsú $\mathcal{O}(n^k)$ élű r-kritikus hipergráf.

Tétel: (*Vértesi*) $\mathrm{Var}(\mathbf{F}_{\mathbf{G}_{r,k}})$-ban a szubdirekt irreducíbilisek épp az r-színezhető k-hipergráfokhoz tartozó lapos hipergráfalgebrák.

Tétel: (*Vértesi*) $\mathbf{F}_{\mathbf{G}_{r,k}}$ véges lapos hipergráfalgebrákra $\beta(n) \geq \mathcal{O}(n^k)$.