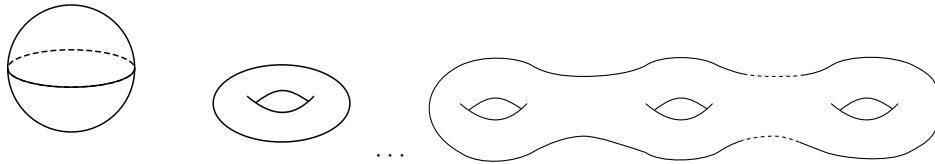


# CSOMÓK ÉS SIMA 3-SOKASÁGOK – HEEGAARD FLOER HOMOLÓGIÁK

VÉRTESEI VERA

## 1. BEVEZETÉS

A topológia a terek struktúrájával, és azok megkülönböztetésével foglalkozik. Az egyik legtermészetesebben előforduló térfajták a sokaságok, melyek lokálisan Euklideszi terek, azaz egy pont környezetében homeomorfak egy Euklideszi térrel. A kompakt 0 dimenziós sokaság véges sok diszkrét pontból állnak. Az 1 dimenziós kompakt sokaság az  $S^1$  körvonal. A kompakt irányítható 2-dimenziós sokaságoknak egy végtelen sorozata van (1. ábra), melyeket a felület “lyukainak” száma: a felület neme, vagy génusza ír le. 3 és 4 dimenzióban, a helyzet lényegesen bony-



ÁBRA 1. Irányítható felületek.

olultabb, pl. tetszőleges fundamentális csoportú 3- ill. 4-sokaságok léteznek, és már ezen csoportok összehasonlítása is nehéz. Bizonyos sokaságokra lehet definiálni a differenciálható függvényeket, ezek a differenciálható- vagy sima sokaságok. Az egyszerűség kedvéért mostantól csak ilyenekkel foglalkozunk. Az alacsonydimenziós topológia hosszútávú feladata a sima 3- ill. 4-dimenziós sokaságok valamilyen értelemben vett megértése. Az ilyen problémaköröknek két iránya van: a konstrukciók, melyek segítségével le lehet írni sokaságokat, és az invariánsok, melyek segítségével pedig meg lehet őket különböztetni. A sima 3- és 4-sokaságok esetében sok konstrukció van, melyek segítségével elő lehet állítani és sokszor kompaktan megadni az összes ilyen sokaságot. Tetszőleges sokaságot le lehet írni a fogantyúfelbontásával, mely a 4-dimenziós esetben a Kirby-kalkulust, 3-dimenziósban pedig a 3-sokaság Heegaard felbontását adja (4.1. alfejezet). Sokszor hasznos a sokaságokat kisebb dimenziós építőkövekből, esetleg alacsonyabb dimenziós sokaságok (csavart) szorzataként előállítani. Persze nem minden sokaság áll így elő, de bizonyos szingularitások megengedésével már igen, 4-dimenziós esetben a Lefschetz fibrálásokat, 3-dimenziós esetben pedig a nyílt könyv felbontásokat adva. Sőt mivel minden 3-sokaság egy 4-sokaságnak a peremeként is előáll, ezért így is leírhatóak, mely segítségével a 3-sokaságokat műtétekkel is előállíthatjuk  $S^3$ -ból (7.4. alfejezet). Donaldson differenciáloperátorok megoldásaiént definiált egy 4-sokaság invariánst, mely segítségével sikerült olyan 4-sokaságokat találni, melyeken nincs sima struktúra. A fizikából eredő, szintén differenciáloperátorok megoldásait számláló invariáns a Seiberg-Witten invariáns. Ennek létezik egy 3-dimenziós változata, amely ennek az általánosítása a 3-sokaság egy elég hosszú intervallummal való szorzatára. Ozsváth és Szabó a 3-sokaságok Heegaard felbontásaihoz rendelt terek vizsgálatával definiált sok esetben egyszerűbben számítható invariánsokat, a Heegaard Floer

homológiákat. A Heegaard Floer homológiának 4-sokaság invariánst adó változata (7.3. alfejezet), és 3-sokaságokban lévő csomóinvariáns változata is van (7.1. alfejezet).

Ez a jegyzet ismeretterjesztő jellegű, a Heegaard Floer homológia legegyszerűbb változataiba ad egy rövid bevezetést, koncentrálna az invariánsok alkalmazásaira.

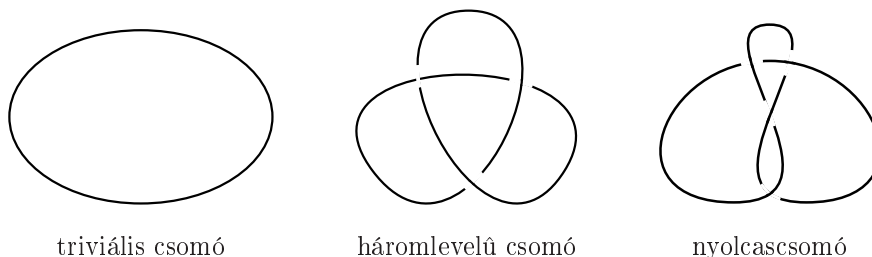
## 2. CSOMÓK

A topológikus invariánsok lényegét egy egyszerűbb példán, az Euklideszi térbeli csomókon érzékeltetjük.

**definíció 2.1.** *Egy (sima) csomó az  $S^1$  körvonal beágyazott képe  $\mathbb{R}^3$  (vagy  $S^3$ )-ba.*

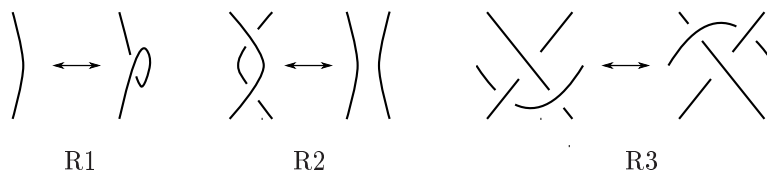
Mint az alábbi példák (5. ábra) is egy csomót általában az  $\mathbb{R}^2$  síkra való generikus (háromszoros pontot és önmagát nem érintő) vetületével, és minden kétszeres pontban az alul-felül információt elkódoló megszakítással adunk meg. Az ilyen, alul-felül információt megszakítással jelző, vetület a csomó diagramja.

**példa 2.2.** *triviális csomó, jobbkezes háromlevelű csomó, nyolcascsomó*



ÁBRA 2. Irányítható felületek.

A csomóelmélet a csomókat próbálja klasszifikálni izotópia erejéig. Azonos diagrammú csomók izotópok, úgyhogy ezzel az ábrázolással nem veszünk információt. A csomó térbeli izotópiája során változhat a diagramm, a 3 ábra a csomódiagramm ilyen lokális változásait szemlélteti.



ÁBRA 3. Reidemeister lépések (az ábrák lokálisak, a csomódiagramm többi része változatlan)

Ezek a lépések elégségesek is, azaz:

**tétel 2.3.** [?, ?] *Két diagramm pontosan akkor tartozik izotóp csomókhoz, ha véges sok Reidemeister lépéssel és izotópiával egymásba deformálható.  $\square$*

Ennek a tételnek a segítségével, könnyű megmutatni két diagrammról, hogy izotóp; egyszerűen megmutatjuk a két csomódiagrammot egymásba vivő Reidemeister lépések sorozatát. Azonban, ha a csomók nem izotópok sokkal nehezebb dolgunk van; meg kéne tudni mutatni, hogy nincs ilyen sorozat. Ezért van szükség

invariánsok bevezetésére. Egy csomóinvariáns a csomók izotópiaosztályaihoz hozzárendelt mennyiség/struktúra, amely tehát ha két csomóra kiszámolva különböző, akkor a két csomó nem izotóp.

Egy könnyen definiálható csomóinvariáns a csomó génusza, melynek definíciója azon múlik, hogy  $S^3$ -ban minden csomó határol irányítható felületet, melyet a csomó Seifert felületének nevezünk.

**definíció 2.4.** *Egy  $K$  csomó génusza,  $g(K)$  a csomó Seifert felületeinek génuszainak minimuma. Egy csomó fibrált, ha a komplementuma a csomó Seifert felületeinek egy  $S^1$ -családja.*

Definíció szerint csak a triviális csomónak 0 a génusza. Egy tetszőleges Seifert felület génusza felsőbecslést ad  $g(K)$ -ra, azonban általában nehéz eldönteni, hogy a talált felület minimális genuszú-e. A csomó génuszára az első alsőbecslést az Alexander polinom szolgáltatta, mely polinom segítségével a fibráltságra is adható szükséges feltétel.

A 2.3 tétel invariánsok definiálására is alkalmas: ha minden csomódiagrammhoz definiálunk egy struktúrát, amely nem változik a Reidemeister lépések során, akkor egy csomó-invariánsot kapunk. Az Alexander polinom egy szimmetrikus  $\mathbb{Z}[t^{\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2}}]$ -beli polinom, melyet a Kauffman állapotok segítségével lehet kiszámítani [?]. Egy  $K$  irányított csomó  $V$  vetülete egy immertált görbe  $\mathbb{R}^2$ -ben, mely tartományokra osztja a síkot. Jelölje  $\text{cr}(V)$  a vetület metszéspontjait,  $D(V)$  a vetület tartományainak halmazát. Az Euler-féle poliéder tétel szerint:  $|D(V)| = |\text{cr}(V)| + 2$ . Rögzítsünk egy  $e$  élet a vetületen, és jelölje  $D(V, e)$  az  $e$ -től diszjunk tartományok halmazát, ezekre már  $|D(V, e)| = |\text{cr}(V)|$ .



ÁBRA 4. Az csúcsokban a Kauffman állapotokhoz rendelt értékek.

**definíció 2.5.** *Egy  $(V, e)$ -pár Kauffman állapota egy  $\sigma: \text{cr}(V) \rightarrow D(V, e)$  bijekció, mely minden metszéspont-hoz vele szomszédos tartományt rendel. A 4 ábra szerint egy Kauffman állapot minden  $c \in \text{cr}(V)$  csúcsához két értéket,  $M(\sigma(c))$  és  $A(\sigma(c))$  rendel, magához a Kauffman állapothoz pedig ezek összegét:  $A(\sigma) = \sum_{c \in \text{cr}(V)} A(\sigma(c))$  és  $M(\sigma) = \sum_{c \in \text{cr}(V)} M(\sigma(c))$ . A  $(V, e)$  párhoz pedig a*

$$\Delta_{(V, e)}(t) = \sum_{\sigma} (-1)^{A(\sigma)} t^{M(\sigma)}$$

polinomot rendeljük.

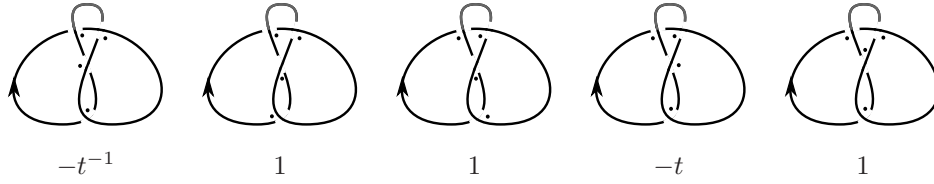
**megjegyzés 2.6.** *Kicsit más szemszögből nézve, az Alexander polinom egy metszéspont-tartomány mátrix determinánsaként is számítható, melynek elemei a megfelelő metszéspont-tartomány helyen:  $t^M$ .*

**példa 2.7.** *A nyolcas csomó egy vetületéhez tartozó Kauffman állapotokat és az egyes állapotokhoz tartozó polinomokat a 4 ábra szemlélteti.*

*Így ehhez a vetülethez (és élhez tartozó) Alexander polinom:*

$$-t^{-1} + 3 - t$$

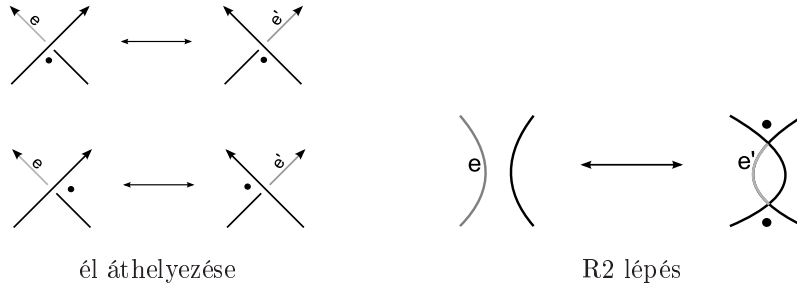
Az Alexander polinom független a vetület és a rajta lévő él választásától, így:



ÁBRA 5. A nyolccsósó Kauffmann állapotai. A kijelölt él vilá-gosszürkével, a metszéspontokhoz tartozó tartományok pedig a tar-tomány sarkába helyezett pontokkal vannak jelölve.

**tétel/definíció 2.8.** *Ha  $(V, e)$  és  $(V', e')$  párok izotóp csomókhoz tartoznak, akkor  $\Delta_{(V,e)}(t) = \Delta_{(V',e')}(t)$ . Egy  $K$  csomó szimmetrizált Alexander polinomja  $\Delta_K(t) = \Delta_{(V,e)}(t)$ , ahol  $V$  a csomó tetszőleges vetülete,  $e$  pedig a vetület tetszőleges éle.*

*Bizonyítás* Először azt látjuk be, hogy rögzített  $V$  esetén a polinom független az  $e$  él választásától. Ehhez elég azt belátni, hogy ha  $e$  és  $e'$  élek ugyanabban a csúcsban kezdődnek illetve végződnek, akkor  $\Delta_{(V,e)}(t) = \Delta_{(V,e')}(t)$ . Ez pedig igaz, hiszen a 6 ábra baloldala szerint a két polinomot definiáló Kauffmann állapotok 1-1 értelműen megfeleltethetők egymásnak. Az első Reidemeister lépés során a polinom nem változik, hiszen az újonnan kialakult tartományt csak az új csúcshoz tartozhat, és így megint kapunk egy 1-1 értelmű megfeleltetést a régi és új Kauffmann állapotok között. A második Reidemeister lépésnél a megfeleltetést a 6 ábra jobboldala adja. És ugyanígy, bár kicsit hosszabban jön ki a harmadik Reidemeister lépéstől való függetlenség is, amit most nem részletezünk.



ÁBRA 6. Megfeleltetés a Kauffman állapotok között. (a többi csúc-snál a Kauffman állapotok megegyeznek)

□

Ha egy vetületet a sík másik oldaláról nézünk, akkor  $t^{\frac{1}{2}}$  és  $t^{-\frac{1}{2}}$  szerepe felcserélődik, azaz  $\Delta_K(t)$  szimmetrikus ( $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$ ), azaz az Alexander polinom felírható:

$$\Delta_K(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i (t^{\frac{i}{2}} + t^{-\frac{i}{2}})$$

Az Alexander polinom segítségével tudunk alsó becslést adni a csomó génuszára:

**tétel 2.9.**  $g(K) \geq n$  □

A fibráltsághoz egy szükséges feltétel:

**tétel 2.10.** *Egy  $K$  fibrált csomó Alexander polinomjára  $n = g(K)$ , és  $a_n = 1$ .* □

A 2.9 tétel segítségével több csomó, mint például a nyolccsósó génusza is kiszámítható (=1). Azonban ez a becslés sokszor nem egyenlőséggel teljesül. Sok csomónak például 1 az Alexander polinomja.

## 3. ALGEBRAI ALAPFOGALMAK

Mint azt megjegyeztük, az Alexander polinomot egy mátrix determinánsaként is lehet definiálni. Annak ellenére, hogy a mátrix nem marad változatlan a Reidemeister lépések során, a determinánsa mégis invariáns lesz. Hasonló ötlet rejlik a lánckomplexusok homológiái mögött is. Sok topológiai invariánst definiálnak homológiákkal. Ugyan maguk a lánckomplexusok általában nem, de a homológiájuk invariáns marad az ekvivalencia-lépések során.

**definíció 3.1.** Legyen  $C = \oplus C_i$  egy gradált modulus. És legyen  $\partial = \oplus \partial_i : C \rightarrow C$  egy homomorfizmus, amely eggyel csökkenti a gradálást, azaz melyre  $\text{im } \partial_i \subseteq C_{i-1}$ . Egy lánckomplexus egy olyan  $(C, \partial)$  pár, melyre  $\partial^2 = 0$ .

A  $C$  modulust a fokszámok szerint külön szedve egy lánckomplexus tehát modulusok és köztük menő homomorfizmusok egy sorozata:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{i+2}} C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \cdots$$

melyre  $\partial_{i+1} \circ \partial_i = 0$ . Ez a feltétel ekvivalens az  $\text{im } \partial_{i+1} \subseteq \ker \partial_i \subseteq C_i$  feltétellel, és így definiálható egy lánckomplexus homológiája:

**definíció 3.2.** A  $(C, \partial)$  lánckomplexus homológiája a  $H_*(C, \partial) = \ker \partial / \text{im } \partial$  gradált modulus, melynek  $i$ -edik tagja:  $H_i (= H_i(C, \partial)) = \ker \partial_i / \text{im } \partial_{i+1}$ .

**definíció 3.3.** Legyen  $k$  az  $R$  (nullóstómentes) gyűrű hányadosteste. Egy  $M$   $R$ -modulus rangja  $\text{rk}(M)$  az  $M \otimes k$  vektortér dimenziója. (Ez a fogalom, vektorterekre a dimenzió, és  $\mathbb{Z}$ -modulusokra, azaz Abel csoportokra pedig a szabadrészes dimenziója.) Egy  $C = \oplus C_i$  gradált modulus Euler karakterisztikája  $\chi(C) = \sum (-1)^i \text{rk}(C_i)$ .

A  $0 \rightarrow \ker \partial_i \rightarrow C_i \rightarrow \text{im } \partial_i \rightarrow 0$  és a  $0 \rightarrow \text{im } \partial_{i+1} \rightarrow \ker \partial_i \rightarrow H_i \rightarrow 0$  rövid egzakt sorok szerint a rangokra fennáll:

$$\begin{aligned} \text{rk}(C_i) &= \text{rk}(\ker \partial_i) + \text{rk}(\text{im } \partial_i) \\ \text{rk}(\ker \partial_i) &= \text{rk}(\text{im } \partial_{i+1}) + \text{rk}(H_i) \end{aligned}$$

Ebből  $\chi(C) = \sum (-1)^i \text{rk}(C_i) = \sum (-1)^i (\text{rk}(\ker \partial_i) + \text{rk}(\text{im } \partial_i)) = \sum (-1)^i (\text{rk}(\ker \partial_i) - \text{rk}(\text{im } \partial_{i+1})) = \sum (-1)^i \text{rk}(H_i) = \chi(H)$ , azaz egy lánckomplexus és a homológiájának az Euler karakterisztikája megegyezik.

**definíció 3.4.** Az  $f : (C, \partial^C) \rightarrow (D, \partial^D)$  lánckomplexusok közötti gradálást tartó leképezés láncképezés, ha  $f \circ \partial^D = \partial^C \circ f$ . Azaz, ha a

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{i+2}^C} & C_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{i+1}^C} & C_i & \xrightarrow{\partial_i^C} & C_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{i-1}^C} & \cdots \\ & & \downarrow f_{i+1} & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i+1} & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial_{i+2}^D} & D_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{i+1}^D} & D_i & \xrightarrow{\partial_i^D} & D_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{i-1}^D} & \cdots \end{array}$$

diagramm kommutatív. Egy láncképezés természetesen indukál egy  $f_* : H_*(C, \partial^C) \rightarrow H_*(D, \partial^D)$  leképezést a homológiákon.

Láncképezés pl. az identitás:  $\text{id}_C : (C, \partial^C) \rightarrow (C, \partial^C)$ . Ahhoz, hogy két láncképezés ugyanazt a leképezést indukálja a homológiákon elégséges:

**definíció 3.5.** Az  $f, g : (C, \partial^C) \rightarrow (D, \partial^D)$  láncképezések lánchomotópok, ha létezik egy  $h : (C, \partial^C) \rightarrow (D, \partial^D)$  leképezést, mely 1-gyel csökkenti a gradálást, és

melyre:  $(f - g) = h \circ \partial^C \pm \partial^D \circ h$ . Azaz a

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \xrightarrow{\partial_{i+2}^C} & C_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{i+1}^C} & C_i & \xrightarrow{\partial_i^C} & C_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{i-1}^C} & \cdots \\
 & \nearrow h_{i+1} & \downarrow & \searrow h_i & \downarrow & \nearrow f_i & \downarrow & \searrow h_{i-2} & \\
 \cdots & \xrightarrow{\partial_{i+2}^D} & D_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{i+1}^D} & D_i & \xrightarrow{\partial_i^D} & D_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{i-1}^D} & \cdots
 \end{array}$$

diagrammra  $f_i - g_i = h_{i-1} \circ \partial_i^C \pm \partial_i^D \circ h_i$ .

Egy  $c \in \ker \partial^C$ , elemre  $f - g(c) = h \circ \partial^C(c) \pm \partial^D \circ h(c) = 0 \pm \partial^D \circ h(c) \in \text{im } \partial^D$ , azaz lánchomotóp leképezések tényleg ugyanazt a leképezést indukálják a homológiákon.

**definíció 3.6.** A  $(C, \partial^C)$  és a  $(D, \partial^D)$  lánckomplexusok lánchomotópekvivalensek, ha léteznek  $f : (C, \partial^C) \rightarrow (D, \partial^D)$  és  $g : (D, \partial^D) \rightarrow (C, \partial^C)$  láncképezések, melyekre  $f \circ g$  lánchomotóp  $\text{id}_D$ -vel és  $g \circ f$  lánchomotóp  $\text{id}_C$ -vel.

A természetesség miatt  $(\text{id}_D)_* = f_* \circ g_*$  és  $(\text{id}_C)_* = g_* \circ f_*$ , azaz az  $f_* : H_*(C, \partial^C) \rightarrow H_*(D, \partial^D)$  és a  $g_* : H_*(D, \partial^D) \rightarrow H_*(C, \partial^C)$  leképezések egymás inverzei, így  $H_*(C, \partial^C) \cong H_*(D, \partial^D)$ :

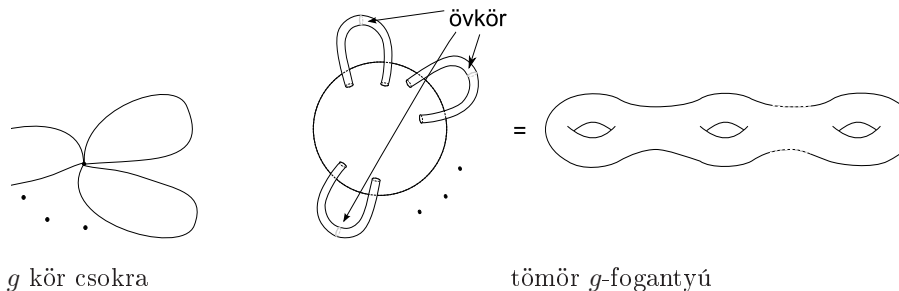
**tétel 3.7.** Lánchomotópekvivalens lánckomplexusok homológiája izomorf.  $\square$

#### 4. 3-SOKASÁGOK MEGADÁSA

A csomóinvariánsoknál bevált stratégiát követve egy olyan leírását keressük a 3-sokaságoknak, melyeknél értjük, hogy két megadás mikor adja ugyanazt a 3-sokaságot. Ilyen megadás a 3-sokaság Heegaard felbontása, illetve Heegaard diagramja.

**4.1. Heegaard felbontások.** A 3-sokaságok építőkövei a tömör  $g$ -fogantyúk:

**definíció 4.1.** Egy  $U$  tömör  $g$ -fogantyú  $g$  kör csokrának (lásd a 7 ábrát) a környezete  $\mathbb{R}^3$ -ban. Egy tömör  $g$ -fogantyú egy peremes 3-sokaság, melynek pereme egy  $\Sigma$   $g$ -génuszú felület.



ÁBRA 7

Tetszőleges összefüggő  $G(V, E)$  gráf környezete tömör  $g(= |E| - |V| + 1)$ -fogantyú.

**definíció 4.2.** Két tömör  $g$ -fogantyú,  $U_1$  és  $U_2$ , peremének összeragasztásával egy zárt,  $Y$ , 3-sokaságot kapunk. Az  $Y = U_1 \cup_{\Sigma} U_2$  felbontás az  $Y$  Heegaard felbontása,  $g$  a Heegaard felbontás génusza,  $\Sigma$  a Heegaard felbontáshoz tartozó Heegaard felület, a határokat azonosító  $\phi: \partial U_1 = \Sigma \rightarrow \Sigma = \partial U_2$  leképezés pedig a Heegaard felbontás ragasztóleképezése.

**példa 4.3.** A legegyszerűbb Heegaard felbontása  $S^3$ -nak van:

$$S^3 = D^3 \cup_{\text{id}} D^3$$

Sőt, mivel  $\partial D^3 = S^2$  minden irányítástartó diffeomorfizmusa izotóp az identitással, ezért minden 0-génuszú Heegaard felbontás  $S^3$ -at adja.  $S^3$ -nak van 1 génuszú Heegaard felbontása is:

**példa 4.4.** A 3-gömb  $\mathbb{C}^2$  egy részhalmaza:  $S^3 = \{|(z_0, z_1)| = 1\} \subset \mathbb{C}^2$ . Így két részre bontható:  $S^3 = U_1 \cup U_2$ , ahol

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(z_0, z_1) \in S^3 : |z_0| \leq |z_1|\} \\ U_2 &= \{(z_0, z_1) \in S^3 : |z_1| \leq |z_0|\}. \end{aligned}$$

$U_0$  és  $U_1$  tömör tóruszok, metszetük, a Heegaard felület egy tórusz:

$$T^2 = U_1 \cap U_2 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 : |z_0| = |z_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}\}.$$

A ragasztóleképezés megadásához  $U_0$ -at és  $U_1$ -et is azonosítanunk kell egy standard tömör 1-fogantyúval, pl.:

$$U = S^1 \times D^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : 1, |w| \leq 1 = |z|\}.$$

Az azonosítóleképezések:

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U &\rightarrow U_0 & \varphi_2 : U &\rightarrow U_1 \\ (z, w) &\mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}w, \frac{1}{\sqrt{2}}z\right) & (z, w) &\mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}z, \frac{1}{\sqrt{2}}w\right) \end{aligned}$$

A ragasztás ekkor:

$$\varphi = \varphi_2^{-1}|_{\partial U} \circ \varphi_1|_{\partial U} : \begin{aligned} \partial U &\rightarrow \partial U \\ (z, w) &\mapsto (w, z) \end{aligned}$$

Legyen  $K$  a triviális csomó  $S^3 \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ -ban, ekkor az  $U_1 = N(K)$  és  $U_2 = S^3 - N(K)$  szintén ezt a Heegaard felbontást adja.

Azonban nem csak  $S^3$ -nak létezik 1 génuszú Heegaard felbontása.

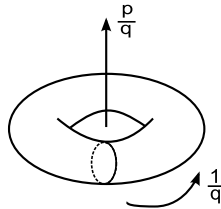
**definíció 4.5.** Az  $L(p, q)$  lencsetér az  $S^3 = \{|(z_0, z_1)| = 1\} \subset \mathbb{C}^2$  gömb

$$(z_0, z_1) \mapsto (e^{\frac{2\pi i}{q}} z_0, e^{p \frac{2\pi i}{q}} z_1)$$

$\mathbb{Z}_q$ -hatás szerinti faktora, azaz:

$$L(p, q) = \frac{S^3}{(z_0, z_1) \sim (e^{\frac{2\pi i}{q}} z_0, e^{p \frac{2\pi i}{q}} z_1)},$$

Ugyanez a hatás leírható  $S^3$  1-génuszú Heegaard felbontásának segítségével is: a hatás  $\frac{1}{q}2\pi$ -vel forgatja az  $U_1 = N(K)$  részt, és  $\frac{p}{q}2\pi$ -vel részt (8)



ÁBRA 8. A  $\mathbb{Z}_q$  hatás  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ -on.

**példa 4.6.** A fenti  $\mathbb{Z}_q$ -hatásra nézve az 4.3 példabeli  $U_1$  és  $U_2$  fogantyúk invariánsak, a faktorok tömör tóruszok, jelölje őket  $V_1$  és  $V_2$ . Ezek a lencsetér egy Heegaard felbontását adják:

$$L(p, q) = V_1 \cup V_2.$$

Annak ellenére, hogy a fenti példák speciálisnak tűnnek, minden 3-sokaságnak van Heegaard felbontása:

**állítás 4.7.** Minden  $Y$  zárt irányított 3-sokaság előáll  $Y = U_1 \cup_{\varphi} U_2$  alakban.

*Bizonyítás* Rögzítsük  $Y$  egy triangulációját  $\mathbb{I}$  és legyen  $U_1$  a trianguláció 1-vázának egy környezete, a komplementer  $U_2 = Y - \mathring{U}_1$  a duális felbontás 1-vázával diffeomorf, így mindkettő tömör fogantyú. Mivel  $\partial U_1 = \partial U_2$ , így a génuszuk megegyezik, azaz  $U_1$  és  $U_2$   $g$ -fogantyúk azonos  $g$ -re.  $\square$

Ha egy sokaságnak van  $Y = U_0 \cup U_2$   $g$  génuszú Heegaard felbontása, akkor van  $g + 1$  génuszú is. Legyen ugyanis  $(c, \partial c) \hookrightarrow (U_1, \partial U_1)$  egy ív  $U_1$ -ban, jelölje  $N(c)$   $c$  egy kis nyílt környezetét  $U_1$ -ban, ekkor az

$$\begin{aligned} U'_1 &= U_1 - N(c) \\ U'_2 &= U_2 \cup N(c) \end{aligned}$$

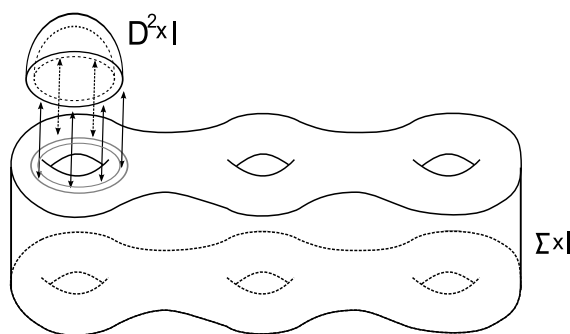
$(g + 1)$ -fogantyúk az  $Y$  egy új  $Y = U'_1 \cup U'_2$  Heegaard felbontását adják, melyet az  $Y = U_1 \cup U_2$  Heegaard felbontás stabilizáltjának nevezünk.

Egy Heegaard felbontás megadásához le kéne tudnunk írni a tömör fogantyúk határa között menő ragasztóképezéseket. Ennek megkönnyítésére a Heegaard felbontásokat Heegaard diagrammokkal adjuk meg.

**4.2. Heegaard diagrammok.** A ragasztóképezés megadása helyett egy  $g$  génuszú felületből kiindulva görbék segítségével adjuk meg, hogy hogyan ragasszuk a felületre a két tömör  $g$ -fogantyút. Az  $U$  tömör  $g$ -fogantyút úgy is konstruálhatunk, hogy egy tömör  $(D^3)$  golyóhoz  $g$  darab tömör csövet  $(I \times D^2)$  ragasztunk a  $\partial I \times D^2$  körlapok mentén (lásd a 7 ábrát). A csövek felületén lévő  $\{0\} \times D^2$  görbe a cső övköre. A fogantyú felületén az övkörökre igaz:

1. Minden övkör körlapot határol  $U$ -ban;
2. Az övkörök diszjunktak, és függetlenek a felület homológiájában.

Fordítva a  $\Sigma_g$   $g$  génuszú felületen adott bármely homológikusan független görbe  $g$ -es leír egy tömör  $g$ -fogantyút a következőképpen. Ragasszunk vastagított  $D^2 \times I$  körlapokat a  $\Sigma_g \times \{1\} \subset \Sigma_g \times I$  felülethez a megadott görbék mentén. Mint a 9. ábrán látható, a ragasztást úgy kell végrehajtani, hogy a görbe egy csőszerű környezetét  $\Sigma_g$ -n azonosítsuk  $\partial D \times I$ -vel. A körlapok ragasztása után egy 3-sokaságot kapunk



ÁBRA 9. Körlap ragasztása.

$\Sigma_g \cup S^2$  peremmel. Az  $S^2$  komponenst egy  $D^3$  golyóval beragasztva egy tömör  $g$ -fogantyút kapunk. A fenti receptet követve tehát két homológikusan független görbe  $g$ -esből egy teljes 3-sokaság felépíthető.

**definíció 4.8.** A  $(\Sigma_g, \alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}, \beta = \{\beta_1, \dots, \beta_g\})$  hármás Heegaard diagramm, ha



1.  $\alpha_1, \dots, \alpha_g \subset \Sigma_g$  diszjunkt, beágyazott,  $H_1(\Sigma_g)$ -ben lineárisan független görbék;
2.  $\beta_1, \dots, \beta_g \subset \Sigma_g$  diszjunkt, beágyazott,  $H_1(\Sigma_g)$ -ben lineárisan független görbék.

A  $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$  Heegaard diagramm  $Y$ -t írja le, ha az  $Y = U_1 \cup_{\Sigma_g} U_2$   $\alpha$  Heegaard felbontásra az  $\alpha$ -görbék körlapokat határolnak  $U_1$ -ben, a  $\beta$ -görbék pedig körlapokat határolnak  $U_2$ -ben.

A  $H_1(\Sigma_g)$ -ben való lineáris függetlenség könnyen ellenőrizhető:

**megjegyzés 4.9.** Az  $\alpha$  diszjunkt beágyazott görbe  $g$ -es lineárisan független  $H_1(\Sigma_g)$ -ben, pontosan akkor, ha  $\Sigma_g - \cup \alpha$  összefüggő.

A Mayer-Vietoris sor szerint egy 3-sokaság homológiája kiszámítható a hozzá tartozó Heegaard diagramm segítségével:

**állítás 4.10.** Ha  $(\Sigma, \alpha, \beta)$  az  $Y$  sokaság Heegaard diagrammja, akkor:

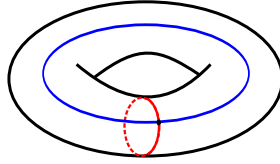
$$H_1(Y) = \frac{H_1(\Sigma)}{\langle \alpha \rangle \oplus \langle \beta \rangle}$$

□

A továbbiakban egy-két példát adunk Heegaard diagrammokra:

**példa 4.11.** Az  $S^3 = D^3 \cup_{S^2} D^3$  Heegaard felbontáshoz tartozó Heegaard diagramm nem tartalmaz görbét:  $(S^2, \emptyset, \emptyset)$ .

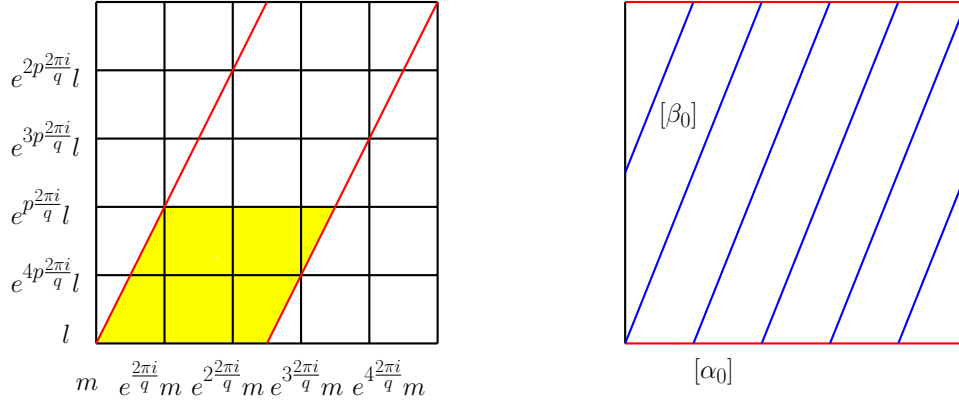
**példa 4.12.**  $S^3$  1 génuszú Heegaard felbontásához tartozó Heegaard diagramm az 12. ábrán látható  $(T^2, \alpha_0, \beta_0)$ .



ÁBRA 10.  $S^3$  Heegaard diagramja. (a meridionális görbe  $\alpha_0$ , a longitudinális  $\beta_0$ )

**példa 4.13.** A  $(T^2, \alpha, \alpha)$  párhuzamos görbéket tartalmazó Heegaard diagramm  $S^1 \times S^2$ -t adja meg. Az  $\alpha$ -görbére transzverzális longitudinális görbe mentén a ragasztott körlapok egy  $S^2$  gömbbé állnak össze, így adva  $S^2$ -k egy  $S^1$  családját.

**példa 4.14.** A 4.6. példabeli  $L(p, q) = V_1 \cup V_2$  felbontáshoz tartozó Heegaard diagram megadásához először rögzítenünk kell a  $\frac{T^2}{\mathbb{Z}_q}$  faktortórusz egy azonosítását a  $T^2$  tóruszsal. Ehhez meg kell találnunk a hatás egy elemi tartományát (azaz egy olyan tartományt, mely a hatás minden  $q$ -as ekvivalenciaosztályából pontosan egy elemet tartalmaz). A 4.12. példabeli  $\alpha_0, \beta_0$  koordinátákkal a  $T^2$  tórusz görbéi a meredekségükkel írhatóak le,  $\alpha_0$  meredeksége pl. 0,  $\beta_0$ -é pedig  $\infty$ . Egy,  $l, p$  meredekségű görbét (lásd a 11. ábra bal oldali ábráját a  $q = 5, p = 3$  estre.) a  $\mathbb{Z}_q$  hatás fixen hagy. Az  $\alpha_0, e^{p \frac{2\pi i}{q}} \alpha_0$  és  $l$  görbék által határolt tartomány elemi. A  $\frac{T^2}{\mathbb{Z}_q}$  faktortórusz az elemi tartományból a vízszintes határok egymással és a  $p$ -meredekségű határok egymással azonosításával kapható. A 4.12. példa  $\alpha_0$  és  $\beta_0$  görbéinek, és az általuk határolt diszkeknek képei  $q$ - $q$  darab diszjunkt görbét és diszket ad, így a faktorizálás utána az  $[\alpha_0], [\beta_0]$  ekvivalenciaosztályok az  $L(p, q) = V_1 \cup V_2$  Heegaard felbontást leíró görbéket adják az  $\frac{T^2}{\mathbb{Z}_q}$  Heegaard felületen. Az új koordinátákban felírva  $[\alpha_0]$  0 meredekségű,  $[\beta_0]$  pedig  $l$ -et  $p$ -szer,  $\alpha_0$ -t pedig  $q$ -szor metszi, azaz  $\frac{p}{q}$  meredekségű.



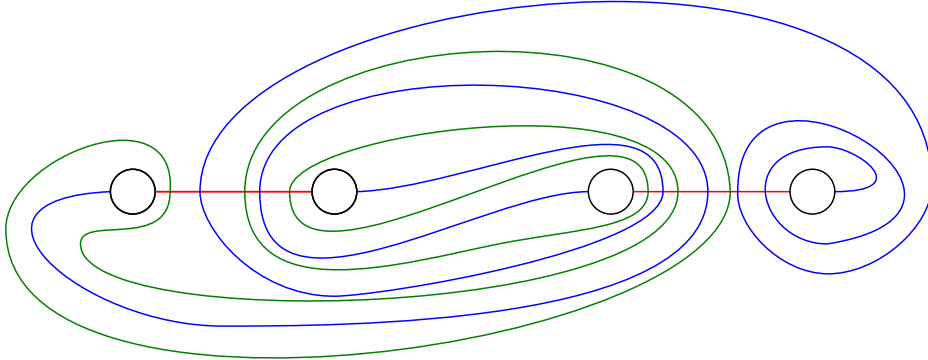
A hatás elemi tartománya.

Az  $L(5,2)$  lencsetér Heegaard diagramja.

ÁBRA 11. Az  $L(5,2)$  lencsetér Heegaard diagramja (a négyzetek alja-teteje, és jobb-baloldal mindkét ábrán azonosítva van).

A 11. ábra jobboldali ábrája az  $L(p,q)$  lencsetér Heegaard diagramját ábrázolja a  $q=5$ ,  $p=2$  esetben.

**példa 4.15.** A következő Heegaard diagramm leírásához képzeljük  $S^2$ -t mint  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ , és azonosítsuk az ábrán lévő baloldali két körvonalat tükrözéssel, és hasonlóan azonosítsuk a jobboldali két körvonalat is egymással. Így egy 2-génuszú felületet kapunk, melyen a görbék egy Heegaard diagrammot adnak meg. (Vegyük észre, hogy az azonosítás után az  $\alpha_1$ -et,  $\alpha_2$ -t és  $\beta_2$ -t ábrázoló görbék valóban zárt görbéké ragadnak össze.)



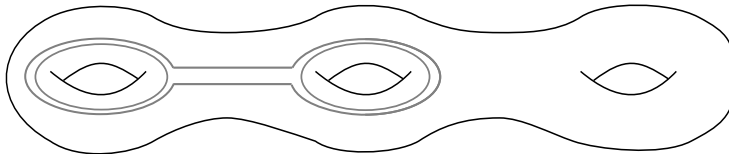
ÁBRA 12.  $Y_2$  Heegaard diagramja.

**definíció 4.16.** Jelölje  $Y_n$  a fent Heegaard diagramm által leírt 3-sokaságot, ahol  $n$  azt jelenti, hogy a  $\beta_2$  görbe hányszor megy körbe a jobboldali kör körül ( $n < 0$  esetén a másik irányba megyünk körbe  $-n$ -szer).

**4.3. Heegaard lépések.** A Heegaard diagramm bizonyos változtatásai nem változtatják meg a definiált 3-sokaságot.

**definíció 4.17.** A Heegaard diagramm izotópiája az  $\alpha$ -, és/vagy  $\beta$ -görbék elmozgatása, úgy, hogy az izotópia során végig beágyazottak és diszjunktak maradnak.

Az izotópia nyilván nem változtatja meg a 3-sokaságot.



ÁBRA 13. Fogantyúcsúsztatás.

**definíció 4.18.** Az  $\alpha_1$  görbe átcsúsztatása  $\alpha_2$  felett egy  $\alpha'_1$  görbét ad, mely az  $\alpha_1$  összefüggő összege  $\alpha_2$  egy tőle diszjunkt eltoltjával. Egy  $(\Sigma, \alpha, \beta)$  Heegaard diagrammban kicserélhetjük  $\alpha_1$ -et  $\alpha'_1$ -re, ha az összefüggő összeget a többi  $\alpha$ -görbétől diszjunktan vettük. Ezt a művelet fogantyúcsúsztatásnak nevezzük.

Az  $\alpha'_1$  görbe a  $H_1(\Sigma)$  homológiában  $\pm\alpha_1 \pm \alpha_2$ -t reprezentálja, azaz az új rendszer is lineárisan független, azaz a kapott 3-as egy Heegaard diagramm. És mivel az új görbe által határolt körlap a régi körlapok határmenti összege, így ez a Heegaard diagramm ugyanazt a 3-sokaságot írja le. A fogantyúcsúsztatás inverze is fogantyúcsúsztatás:  $\alpha'_1$  egy nadrágot határol  $\alpha_1$ -gyel és  $\alpha_2$ /vel közösen. (lásd 13. ábra.) Nem nehéz ellenőrizni, hogy a Heegaard diagrammok összefüggő összege a sokaságok összefüggő összegét adja. Speciálisan egy Heegaard diagrammot  $S^3$  tetszőleges Heegaard diagrammjával összefüggő összegezve a leírt 3-sokaság nem változik.

**definíció 4.19.** Egy Heegaard diagram összefüggő összege  $S^3$  4.3 példabeli  $(T^2, \alpha_0, \beta_0)$  Heegaard diagrammjával a Heegaard diagramm stabilizációja. A fordított műveletet destabilizációnak nevezzük.

A Heegaard felbontások szintjén ez a stabilizáció megfelel a 4.1 fejezetben leírt stabilizációnak. A fent leírt lépések összefoglaló neve Heegaard lépések.

**tétel 4.20.** Ha a  $(\Sigma, \alpha, \beta)$  és a  $(\Sigma', \alpha', \beta')$  Heegaard diagramjai az  $Y$  3-sokaságnak, akkor Heegaard lépések véges sorozatával egymásba vihetők.  $\square$

## 5. A SZIMMETRIKUS SZORZAT

Ebben a fejezetben definiáljuk egy adott  $(\Sigma, \alpha, \beta)$  Heegaard digrammhoz tartozó  $\widehat{CF}(\Sigma, \alpha, \beta)$  lánckomplexust. Maga  $\widehat{CF}$  függ a Heegaard diagrammtól, de a homológiája  $\widehat{HF}$  már 3-sokaság invariáns. Az invariancia bizonyítása bonyolult, később is csak érzékeltetni fogjuk.

**definíció 5.1.** Egy rendezetlen  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_g)$  pont  $g$ -est metszéspontnak vagy generátornak nevezünk, ha  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \alpha \cap \beta$ , és minden  $\alpha$ -, ill.  $\beta$ -görbén legfeljebb egy  $x_i$  pont van. A lánckomplexus  $\widehat{CF}$  alaphalmaza az  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_g)$  metszéspontok által generált  $\mathbb{Z}_2$  vektortér.

**példa 5.2.**  $S^3$  A 4.12. példabeli Heegaard diagramján 1 metszéspont van.  $L(p, q)$  4.14. példabeli Heegaard diagramján  $p$  darab metszéspont van.  $Y_n$  Heegaard diagramja 2-génuszú felületen van, azaz a metszéspontok az

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in (\alpha_1 \cap \beta_1) \times (\alpha_2 \cap \beta_2) \cup (\alpha_2 \cap \beta_1) \times (\alpha_1 \cap \beta_2)$$

pontpárok. Az  $|\alpha_i \cap \beta_j|_{i,j=1}^2$  metszésmátrix:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & n+2 \end{vmatrix}.$$

És így a metszéspontok száma:  $3(n+2) + 2 \cdot 3 = 3 \cdot (n+4)$

Mint például a 4.11. és a 4.13. példában, vannak olyan Heegaard diagrammok, melyeken egyáltalán nincsen metszéspont, ezekhez lánckomplexust sem szeretnénk rendelni. Ettől még az ilyen diagrammok által definiált 3-sokaságoknak is fogunk tudni Heegaard homológiát definiálni más Heegaard diagramokon keresztül. Általában le fogjuk szűkíteni a vizsgált Heegaard diagramok halmazát úgynevezett megengedett Heegaard diagramokra, melyeket majd a 5.1 alfejezetben definiálunk. Amennyiben  $b_1(Y) = 0$ , akkor minden Heegaard diagramm automatikusan megengedett.

Mielőtt definiálni tudnánk a határleképezést, érdemes másképpen is interpretálni a lánckomplexus generátorait. Egy  $\Sigma$  felület  $d$ -edik szimmetrikus szorzata  $\Sigma$  rendezetlen pont  $d$ -eseiből áll.

**definíció 5.3.** *A  $\Sigma^{\times d}$  térhatványon a koordináták cseréje  $S_d$ -hatást definiál (Itt  $S_d$  a  $d$  elemen ható szimmetrikus csoport). A  $\Sigma$  felület  $d$ -edik szimmetrikus szorzata  $Sym^d(\Sigma)$  a  $\Sigma^{\times d}$  térhatvány  $S_d$  szerinti faktortere.*

Ez a konstrukció persze tetszőleges terekre működik. Ami a felületeket különlegessé teszi, az az, hogy annak ellenére, hogy az  $S_d$ -hatás nem szabad, egy felület szimmetrikus szorzata mégis sokaság lesz.

**állítás 5.4.**  *$Sym^d(\Sigma)$  komplex sokaság.*

*Bizonyítás* Először a lokális állítást látjuk be. Egy  $(r_1, \dots, r_d) \in Sym^d(\mathbb{C})$  rendezetlen pont  $d$ -es egyértelműen definiál egy 1 főegyütthatójú polinomot, melynek gyökei épp az  $\{r_1, \dots, r_d\}$  halmaz:

$$(z - r_1) \cdots (z - r_n) = z^d + a_{d-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

És az algebra alaptétele szerint az  $(r_1, \dots, r_d) \mapsto (a_{d-1}, \dots, a_0)$  leképezés bijekció, mely ráadásul (a gyökök és együtthatók közötti összefüggés szerint) homeomorfizmus is. Így a  $\mathbb{C}^d$ -n adott komplex struktúra visszahúzottja indukál egy komplex struktúrát a  $Sym^d(\mathbb{C})$  szimmetrikus szorzaton. Általánosabban  $Sym^d(\Sigma)$  is koordinátázható. Egy  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in Sym^d(\Sigma)$  pont  $d$ -eshez vegyünk egy közös  $U$  elemi környezetet, ekkor az előbbieket alapján  $Sym^d(U) \subset Sym^d(\Sigma)$  konformekvivalens egy  $\mathbb{C}^d$ -beli nyílt halmazzal.  $\square$

A szimmetrikus szorzat topológiájára a következők igazak:

**tétel 5.5.** [1]  $\pi_1(Sym^g(\Sigma)) \cong H_1(Sym^g(\Sigma)) \cong H_1(\Sigma)$ .  $\square$

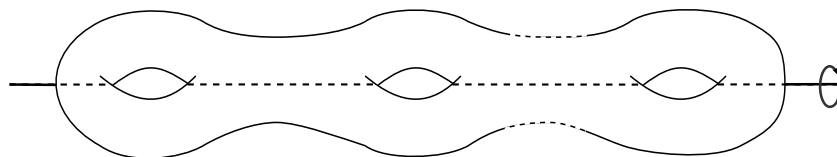
Így a 4.10 állítás szerint a 3-sokaság első homológiájára:

**állítás 5.6.**

$$H_1(Y) \cong \frac{H_1(\Sigma)}{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g \rangle \oplus \langle \beta_1, \dots, \beta_g \rangle} \cong \frac{H_1(Sym^g(\Sigma_g))}{H_1(\mathbb{T}_\alpha) \oplus H_1(\mathbb{T}_\beta)}$$

**tétel 5.7.** [1] *Ha  $g > 2$ , akkor  $\pi_2(Sym^g(\Sigma)) \cong \mathbb{Z}$ .*  $\square$

A  $\pi_2(Sym^g(\Sigma))$ -t generáló elem le is írható. A hiperelliptikus transzformáció  $\tau$  egy  $\Sigma$  felületen, a felület a 14 ábrán adott egyenes körüli  $180^\circ$ -os forgatása. A



ÁBRA 14. A hiperelliptikus transzformáció.

felület  $\tau$  szerinti faktora egy gömb, mely gömböt definiál a szimmetrikus szorzatban is: rögzített  $x_0 \in \Sigma$ -ra  $S = \{(x, \tau(x), x_0, \dots, x_0) : x \in \Sigma\} \subset \text{Sym}^d(\Sigma)$ . Az  $S$  által reprezentált homotópiaosztály generálja  $\pi_2(\text{Sym}^g(\Sigma))$ -t.

Egy Heegaard digramhoz tartozó  $\alpha$ - és  $\beta$ -görbék természetesen definiálnak egy-egy részsokaságot a  $\text{Sym}^d(\Sigma)$  szimmetrikus szorzatban. Mivel mind az  $\alpha$ -, mind a  $\beta$ -görbék diszjunktak, így az  $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_g \subset \Sigma^{\times g}$  és a  $\beta_1 \times \dots \times \beta_g \subset \Sigma^{\times g}$  tóruszokon szabad az  $S_g$ -hatás. A megfelelő faktorok  $\mathbb{T}_\alpha \subset \text{Sym}^g(\Sigma)$  és  $\mathbb{T}_\beta \subset \text{Sym}^g(\Sigma)$  szintén tóruszok. Amennyiben az  $\alpha$ - és  $\beta$ -görbék transzverzálisan metszik egymást, akkor  $\mathbb{T}_\alpha$  és  $\mathbb{T}_\beta$  is transzverzális, komplementer dimenziós részsokaságai  $\text{Sym}^g(\Sigma)$ -nak, és így véges sok pontban metszik egymást:

**definíció 5.8.** A  $(\Sigma, \alpha, \beta)$  Heegaard diagramhoz tartozó lánckomplexus alaphalmaza:

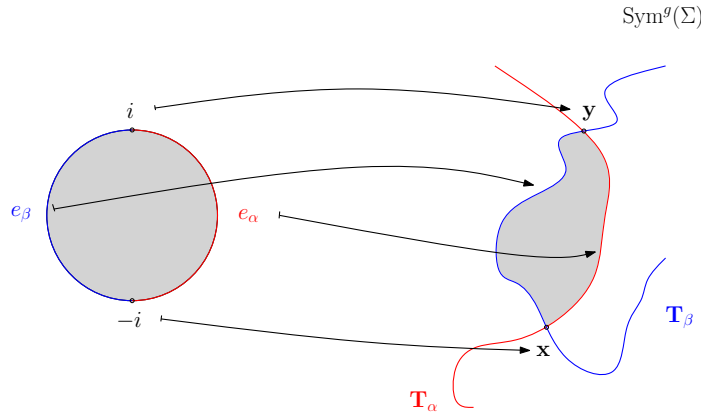
$$\widehat{CF}(\Sigma, \alpha, \beta) = \langle \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta \rangle_{\mathbb{Z}_2}.$$

Azaz a  $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$  metszéspontok által generált formális  $\mathbb{Z}_2$  vektortér.

A határleképezést a metszéspontokat összekötő holomorf körlapok segítségével adható meg.

**5.1. Körlapok a szimmetrikus szorzatban.** Legyen  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  zárt körlap. Osszuk a határát két részre a következőképpen:  $e_\alpha = \{z \in \partial\mathbb{D} : \text{Re}z \geq 0\}$  és  $e_\beta = \{z \in \partial\mathbb{D} : \text{Re}z \leq 0\}$ .

**definíció 5.9.** Az  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$  metszéspontokat összekötő Whitney körlap egy  $u : \mathbb{D} \rightarrow \text{Sym}^g(\Sigma_g)$  leképezés, melyre:  $u(-i) = \mathbf{x}$ ,  $u(i) = \mathbf{y}$ ,  $u(e_\alpha) \subset \mathbb{T}_\alpha$  és  $u(e_\beta) \subset \mathbb{T}_\beta$ . Az  $\mathbf{x}$ -et és  $\mathbf{y}$ -t összekötő Whitney körlapok (Whitney körlapokon keresztüli) homotópiaosztályait jelölje  $\pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .



ÁBRA 15. Whitney körlap.

A  $\pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  halmaz nem alkot csoportot, de Whitney körlapok összefűzésével definiálható egy

$$\pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \pi_2(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \rightarrow \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{v})$$

leképezés, vagy egy belső ponthoz való gömb ragasztásával definiálható a

$$\pi_2(\text{Sym}^g(\Sigma_g)) / \pi_1(\text{Sym}^g(\Sigma_g)) * \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

leképezés. A Whitney körlap létezéséhez egy egyszerű obstrukció adható  $H_1(Y)$ -ban. Válasszunk egy-egy  $\mathbf{x}$ -et  $\mathbf{y}$ -nal összekötő  $a \subset \mathbb{T}_\alpha$  és  $\mathbf{y}$ -t  $\mathbf{x}$ -szel összekötő  $b \subset \mathbb{T}_\beta$  utat, ekkor az  $a * b$  hurok megad egy elemet,  $H_1(\text{Sym}^g(\Sigma))$ -ban, melyhez

tartozó osztály  $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in H_1(Y) \cong \frac{H_1(\text{Sym}^g(\Sigma_g))}{H_1(\mathbb{T}_\alpha) \oplus H_1(\mathbb{T}_\beta)}$ -ban már független az összekötő út választásától. Ez az obstrukció magán a felületen is számítható. Ugyanis az  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_g)$  és  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_g)$  pontokat összekötő  $a \in \mathbb{T}_\alpha$  útra gondolhatunk úgy is, mint az  $a_1, \dots, a_g$  utak rendszerére  $\cup\alpha$ -ban, mely határa  $x_1 + \dots + x_g - y_1 - \dots - y_g$ . Hasonlóan  $b$  azonosítható a  $b_1, \dots, b_g$  útrendszerrel  $y_1 + \dots + y_g - x_1 - \dots - x_g$  határral. Ekkor  $a+b$  egy 1-ciklus,  $\Sigma$ -n, és így definiál egy elemet  $H_1(\Sigma)$ -ban. Ennek képe  $H_1(Y)$ -ban  $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

A definícióból látszik, hogy ha  $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$ , akkor  $\pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \emptyset$ . Ez az obstrukció additív:

$$\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

Igy  $\varepsilon$  megad egy ekvivalenciarelációt a metszéspontokon:

**definíció 5.10.** *Azt mondjuk, hogy az  $\mathbf{x}$  és az  $\mathbf{y}$  metszéspontok ugyanazt a  $\text{Spin}^c$ -struktúrát határozzák meg, ha  $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ . Így a  $\text{Spin}^c$ -struktúrák halmaza affinan  $H_1(Y)$ ; az  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{y}$  pontokhoz tartozó  $\text{Spin}^c$ -struktúrájuk különbsége:  $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .*

A  $\text{Spin}^c$  struktúrák általánosabban tetszőleges valós vektornyalábra definiálhatók, mint a struktúracsoport felemelése  $\text{SL}(n)$  egyetlen nemtriviális  $S^1$ -nyalábjára []. A Heegaard diagrammok metszéspontjainak természetes módon megfeleltethetünk  $\text{Spin}^c$ -struktúrákat [?].

**példa 5.11.** *A Lencseterek 4.14 példabeli Heegaard diagramján lévő metszéspontok között az  $\varepsilon$  obstrukció nemnulla, így mind a  $p$  metszéspont különböző  $\text{Spin}^c$ -struktúrában van.*

*A 4.15. példában  $Y_n$ -en  $n - 4$  különböző  $\text{Spin}^c$ -struktúra van.*

A Whitney körlapokat legjobban a  $\Sigma$  felületre való "vetületükön" keresztül lehet megérteni. Egy Heegaard diagrammot megadó  $\alpha$ - és  $\beta$ -görbék a  $\Sigma$  felületet tartományokra osztják:  $\Sigma - \cup\alpha - \cup\beta = \coprod \mathcal{D}_i$ . Válasszunk ki egy-egy  $z_i \in \mathcal{D}_i$  referenciapontot a tartományokból.

**definíció 5.12.** *A  $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  Whitney körlap multiplicitása a  $\mathcal{D}_i$  tartományban:*

$$n_i(\phi) = \#\{u^{-1}(z_i \times \text{Sym}^{g-1}(\Sigma))\},$$

ahol  $[u] = \phi$  transzverzális  $z_i \times \text{Sym}^{g-1}(\Sigma)$ -re. A multiplicitás csak a homotópiaosztálytól függ.  $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  tartománya:

$$\mathcal{D}(\phi) = \sum n_i(\phi)\mathcal{D}_i.$$

A  $\mathcal{D}(\phi)$  tartomány egy 2-lánc, melynek határára:

**állítás 5.13.** *Rendezzük az  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_g)$  és  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_g)$  metszéspontokat indexeit úgy, hogy  $x_i \in \alpha_i \cap \beta_i$  és  $y_i \in \alpha_i \cap \beta_{\sigma^{-1}(i)}$  (ahol  $\sigma \in S_g$ ), ekkor:*

1.  $\partial\mathcal{D}(\phi)|_{\alpha_i}$  egy  $x_i$ -t  $y_i$ -vel összekötő út;
2.  $\partial\mathcal{D}(\phi)|_{\beta_i}$  egy  $y_{\sigma(i)}$ -t  $x_i$ -vel összekötő út.

□

Fordítva:

**definíció 5.14.** *Azt mondjuk, hogy a  $\mathcal{D} = \sum n_i\mathcal{D}_i$  formális összeg összeköti  $\mathbf{x}$ -et  $\mathbf{y}$ -nal, ha teljesül rá a állítás 1 és 2 következménye.*

A 5.14 állítás általában megfordítható

**állítás 5.15.** *Ha  $g > 1$ , akkor minden  $\mathbf{x}$ -et  $\mathbf{y}$ -nal összekötő  $\mathcal{D}$  tartomány egy  $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  tartománya:  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\phi)$ . Sőt  $g > 2$  estén  $\phi$  egyértelműen meghatározott. □*

És ebből:

**állítás 5.16.**  $g > 2$  esetén a  $\pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  halmaz vagy üres (ha  $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$ ) vagy

$$\pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cong \mathbb{Z} \oplus H_2(Y).$$

□

Az első koordinátát a  $\phi \mapsto n_z(\phi)$  leképezés adja egy tetszőleges  $z \in \Sigma - \alpha - \beta$  referenciapontra.

**definíció 5.17.** A  $z \in \Sigma - \alpha - \beta$  rögzített pontot bázispontnak nevezzük, a  $(\Sigma, \alpha, \beta, z)$  négyes pedig pontozott Heegaard diagramm.

Ugyanazon pontokat összekötő körlapok tartományainak különbségének pereme zárt 1 dimenziós sokaság.

**definíció 5.18.** Egy  $(\Sigma, \alpha, \beta, z)$  pontozott Heegaard diagrammon a  $\mathcal{P} = \sum n_i \mathcal{D}_i$  tartomány periodikus tartomány, ha  $n_z(\mathcal{P}) = 0$ , és  $\mathcal{P}$  határa teljes  $\alpha$ - és  $\beta$ -görbékéből áll.

A periodikus tartományok vektortere  $H_2(Y)$ -nal azonosítható.

**definíció 5.19.** Egy  $(\Sigma, \alpha, \beta, z)$  pontozott Heegaard diagramm megengedhető, ha minden  $\mathcal{P} = \sum n_i \mathcal{D}_i$  nemtriviális periodikus tartománynak van pozitív és negatív együtthatója is.

Ha  $b_1(Y) = 0$ , akkor  $H_2(Y) = 0$ , azaz  $Y$  minden Heegaard diagrammja megengedhető. Általában pedig:

**állítás 5.20.** Tetszőleges  $(\Sigma, \alpha, \beta)$  Heegaard diagramm izotópiával megengedhetővé tehető. □

A továbbiakban pontozott és megengedhető Heegaard diagrammokkal szeretnénk foglalkozni, ezért a 4.20 tétel általánosítanunk kell ilyen Heegaard diagrammokra. Pontozott Heegaard diagrammok izotópiája olyan izotópia, mely végig diszjunk  $z$ -től. Pontozott fogantucsúsztatás esetén a görbék által határolt nadrágról megköveteljük, hogy diszjunk legyen  $z$ -től. A stabilizáció során az összefüggő összegzést  $z$ -től diszjunkt helyen hajtjuk végre. Ekkor:

**tétel 5.21.** ?? Ha a  $(\Sigma, \alpha, \beta, z)$  és a  $(\Sigma', \alpha', \beta')$  megengedhető Heegaard diagrammjai az  $Y$  3-sokaságnak, akkor pontozott Heegaard műveletekkel megengedhető Heegaard diagrammokon keresztül egymásba vihetők. □

**5.2. Holomorf körlapok.** A Morse elmélet általánosításaként a holomorf leképezések sok érdekes toplogiai helyzetben egy jól definiált homológiaelméletet a Floer elméletet szolgáltatnak. A Heegaard Floer elmélet a Lagrange-Floer homológia mintájára olyan holomorf körlapokat vizsgál, melyek határa rögzített (Lagrange-féle) rész-sokaságokba megy. Láttuk, hogy a  $\Sigma$ -n adott komplex struktúra definiál  $\text{Sym}^g(\Sigma)$ -n is egy komplex struktúrát. Első közelítésben az erre a struktúrára nézve holomorf Whitney körlapokat fogjuk vizsgálni. Ehhez rögzítsünk  $\mathbb{D}$ -n is egy komplex struktúrát. Mostantól egy  $u : \mathbb{D} \rightarrow \text{Sym}^g(\Sigma)$  leképezést holomorfnek nevezünk, ha holomorf int  $\mathbb{D}$ -n, és folytonosan terjed ki  $\partial\mathbb{D}$ -re.

**definíció 5.22.** A  $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  homotópiaosztályt reprezentáló holomorf diszkek tere az  $\mathcal{M}(\phi)$  modulus tér.

A  $\text{Sym}^g(\Sigma)$ -beli holomorf körlapokat  $\Sigma$ -n is látni lehet:

**állítás 5.23.** Egy  $u : \mathbb{D} \rightarrow \text{Sym}^g(\Sigma)$  holomorf leképezéshez létezik  $\mathbb{D}$ -nek egy  $g$ -szeres elágazó fedése,  $p : F \rightarrow \mathbb{D}$  és  $u$ -nak egy  $\hat{u} : F \rightarrow \Sigma$  holomorf felemelése,

melyre az  $\widehat{u}(p^{-1}(z))$   $g$ -es épp  $u(z)$ :

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\widehat{u}} & \Sigma \\ \downarrow p & & \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{u} & \text{Sym}^g(\Sigma) \end{array}$$

Egy  $u \in \mathcal{M}(\phi)$  leképezést komponálva egy  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  konform automorfizmussal, mely fixen tartja  $i$ -t és  $-i$ -t megint  $\mathcal{M}(\phi)$ -beli elemet kapunk. A  $\mathbb{D}$  körlap  $i$ -t és  $-i$ -t fixen hagyó konform automorfizmusok tere  $\mathbb{R}$ -rel izomorf (hiszen egy ilyen a határcső 3 pontjának képével egyértelműen meg lehet adni). Így  $\mathcal{M}(\phi)$ -n van egy  $\mathbb{R}$ -hatás, mely szabad a nemkonstans elemeken, jelölje az e szerinti faktort  $\widehat{\mathcal{M}}(\phi)$ . Az  $\mathcal{M}(\phi)$  tér nem feltétlenül sokaság, de a  $\text{Sym}^g(\Sigma)$ -n használt komplex struktúra egy generikus (majdnem) komplex struktúrává perturbálásával már az lesz. Ebben az esetben  $\mathcal{M}(\phi)$  dimenziója  $\mu(\phi)$ , a Maslov index, egy általános elmélet segítségével kiszámítható. A Maslov index összefűzésnél összeadódik, azaz ha  $\phi_1 \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  és  $\phi_2 \in \pi_2(\mathbf{y}, \mathbf{v})$ , akkor:

$$\mu(\phi_1 * \phi_2) = \mu(\phi_1) + \mu(\phi_2).$$

gömb ráragasztásakor pedig:

**állítás 5.24.** Az  $[S] \in \pi_2(\text{Sym}^g(\Sigma))$  generátorra:

$$\mu(\phi + k[S]) = \mu(\phi) + 2k.$$

□

A komplex részsokaságok pozitívan metszik egymást, ezért:

**állítás 5.25.** Ha  $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  homotópiaosztálynak van holomorf reprezentánsa, akkor a  $\mathcal{D}(\phi) = \sum n_i \mathcal{D}_i$  tartomány minden együtthatója nemnegatív:  $n_i \geq 0$ . □

Modulus terek megértése általában Gromov kompaktsági tételeken múlik ??  
Ebben az esetben generikus komplex struktúrára belátható:

**állítás 5.26.** Amennyiben az  $\mathcal{M}(\phi)$  modulustér dimenziója épp 1, akkor az  $\mathbb{R}$ -hatással faktorizált  $\widehat{\mathcal{M}}(\phi)$  tér egy kompakt 0 dimenziós sokaság, azaz véges sok pont.

Ezek száma fogja adni  $\mathbf{y}$  együtthatóját  $\mathbf{x}$  határában. A magasabb dimenziós modulusterek nem kompaktnak, de kompakta tehetők. Az 1 dimenziós esetben a kompaktifikációhoz bevezetett új pontok törött trajektóriákból állnak:

**állítás 5.27.** Ha  $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ -ra  $\mu(\phi) = 2$ , akkor generikus komplex struktúra esetén  $\mathcal{M}(\phi)$  kompaktá tehető, és az új pontok:

$$\overline{\partial \mathcal{M}(\phi)} = \coprod_{\phi = \phi_1 * \phi_2} \mathcal{M}(\phi_1) \times \mathcal{M}(\phi_2).$$

□

A Maslov index additivitása szerint  $\mu(\phi) = \mu(\phi_1) + \mu(\phi_2)$ . Az  $\mathbb{R}$ -hatás miatt a nemkonstans  $\phi_i$ -re  $\mu(\phi_i) = 0$  esetén generikus komplex struktúrára  $\phi_i$ -nek nincsen holomorf reprezentánsa, azaz a fenti állításban:

$$\mu(\phi_1) = \mu(\phi_2) = 1.$$

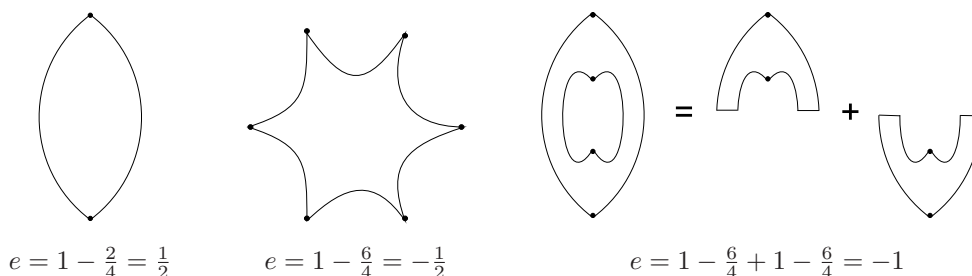


**5.3. Index formula.** R. Lipshitz adott az  $\mathcal{M}(\phi)$  modulus tér dimenziójára egy kombinatorikusan számítható formulát. A dimenzió csak a leképezéshez rendelt  $\mathcal{D}(\phi) = \sum n_i(\phi)\mathcal{D}_i$  tartománytól függ, a formula ehhez a tartományhoz rendelt értékekből az  $e$  euler mértékből, és az  $\mu_{\mathbf{x}}, \mu_{\mathbf{y}}$  pont mértékekből számítható.

**definíció 5.28.** Válasszunk  $\Sigma$ -n egy olyan Riemann metrikát, melyre nézve  $\alpha$  és  $\beta$  görbék merőlegesen metszik egymást. A  $\mathcal{D}_i$  tartomány euler mértéke  $e(\mathcal{D}_i)$  legyen  $\mathcal{D}_i$   $e$  metrika szerint számított mértéke. Ezt a mértéket additívan terjesztjük ki a tartományokra:  $\mathcal{D} = \sum n_i\mathcal{D}_i$  tartomány euler mértéke legyen  $e(\mathcal{D}) = \sum n_i e(\mathcal{D}_i)$ . Egy  $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  leképezés euler mértéke:

$$e(\phi) = e(\mathcal{D}(\phi)) = \sum n_i(\phi)e(\mathcal{D}_i).$$

A Gauss Bonnet tétel segítségével ez a formula még egyszerűbb alakra hozható. Egy csupa derékszögű sarkot tartalmazó,  $\mathcal{P}$ ,  $n$ -szög területe  $e(\mathcal{P}) = 1 - \frac{n}{4}$ . Ebből pedig egy tetszőleges tartomány euler mértékét az additívitás felhasználásával számíthatjuk (16. ábra).



ÁBRA 16. Az euler mérték kiszámítása.

A pontmérték definíciója még egyszerűbb:

**definíció 5.29.** Egy  $x \in \alpha \cap \beta$  metszéspontban négy (nem feltétlenül különböző) tartomány találkozik, jelölje ezek  $\mathcal{D}(\phi)$ -beli multipllicitását rendre  $a, b, c$  és  $d$ . Ekkor az  $x$  pont pontmértéke:

$$\mu_x(\phi) = \frac{a + b + c + d}{4}.$$

Az  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_g) \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$  metszéspont pontmértéke

$$\mu_{\mathbf{x}}(\phi) = \mu_{x_1}(\phi) + \dots + \mu_{x_g}(\phi).$$

A kombinatorikus formula pedig:

**tétel 5.30** (Lipshitz). A  $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  homotópiaosztályhoz tartozó modulustér dimenziója:

$$\mu(\phi) = e(\phi) + \mu_{\mathbf{x}}(\phi) + \mu_{\mathbf{y}}(\phi).$$

□

Ez a tétel a Heegaard Floer homológiáknak egy teljesen új, kombinatorikus átfogalmazásához vezetett **referenciák**.

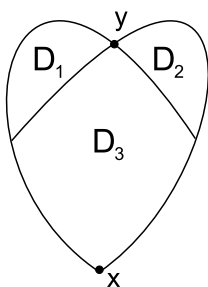
A formula ellenőrzéseképpen vizsgáljuk meg a következő két példát.

**példa 5.31.** Mivel a körlap holomorf automorfizmusainál 3 határpont képe meghatározza a leképezést, így a 16 ábrán látható  $\mathcal{D}(\phi) = \mathcal{D}$  tartományhoz tartozó holomorf leképezések tere 1 dimenziós. Az indexformula szintén 1-et ad:

$$\mu(\phi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

**példa 5.32.** A 17 ábrán látható  $\mathcal{D}(\phi) = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3$  tartományú holomorf körlapok  $\mathcal{M}(\phi)$  tere 2 dimenziós, az  $\mathbb{R}$ -rel vett faktorizáció utáni  $\widehat{\mathcal{M}}(\phi)$  pedig 1 dimenziós. Vágjuk be ugyanis a szívet az 17 ábra szerint az  $\alpha$ -görbe mentén. Ekkor a Riemann leképezés tétele szerint létezik  $\mathbb{D}$ -nek olyan holomorf leképezése  $\mathcal{D}\phi$ -be, mely a határon épp a bevágásig megy. A bevágás akármilyen hosszú lehet (amíg nem megy ki a határig), és a  $\beta$ -görbe mentén is vághatunk, de a határfeltételek miatt egyszerre mindkettőn nem. Ezek szerint az  $\widehat{\mathcal{M}}(\phi)$  modulustér egy nyílt (a bevágás hosszával paraméterezett)szakasz, azaz 1 dimenziós. Az indexet a képlet szerint kiszámítva:

$$\mu(\phi) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 2.$$



ÁBRA 17. A  $\phi$  leképezés tartománya.

## 6. HEEGAARD FLOER HOMOLÓGIÁK

Az eddigi fejezetekben mindent felépítettünk ahhoz, hogy könnyen definiálhassuk a Heegaard Floer homológiákat. A legegyszerűbb változatban a lánckomplexus alaphalmaza  $\widehat{CF}(\Sigma, \alpha, \beta, z)$  a  $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$  metszéspontok által generált  $\mathbb{Z}_2$  vektortér. A 4-dimenziós elmélet hiányában a gradálást csak relatívan tudjuk megadni:

**definíció 6.1.** Az  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$  metszéspontok gradálásánk különbsége:

$$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu(\phi) - 2n_z(\phi)$$

ahol  $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  tetszőleges.  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  az 5.24. állítás szerint független  $\phi$  választásától.

Ez a relatív gradálás minden  $\text{Spin}^c$ -struktúrában ad egy additív konstans erejéig jól definiált gradálást, melyet (az additív konstans rögzítése után) Maslov gradálásnak hívunk.

**definíció 6.2.** A határleképezés  $\widehat{\partial}: \widehat{CF}(\Sigma, \alpha, \beta, z) \rightarrow \widehat{CF}(\Sigma, \alpha, \beta, z)$  egy  $\mathbf{x} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$  generátoron:

$$\widehat{\partial}_{\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta} \sum_{\substack{\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mu(\phi)=1 \\ n_z(\phi)=0}} |\widehat{\mathcal{M}}(\phi)| \mathbf{y}$$

A határleképezés a teljes lánckomplexusra lineárisan terjed ki.

Egy megengedhető diagrammra a második szumma véges:

**állítás 6.3.** Egy megengedhető  $(\Sigma, \alpha, \beta, z)$  Heegaard diagrammra az  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$  metszéspontokat összekötő holomorf reprezentánsal rendelkező  $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  Whitney körlapok száma véges.  $\square$

Tehát  $\widehat{\partial}$  jól definiált. Könnyen látható, hogy a gradálást eggyel csökkenti, és valóban lánckomplexust definiál:

**állítás 6.4.**  $\widehat{\partial}^2 = 0$

*Bizonyítás alapötlete.*

$$\widehat{\partial}^2 \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta} \sum_{\substack{\phi_1 \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mu(\phi_1)=1 \\ n_z(\phi_1)=0}} \left( \sum_{\mathbf{v} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta} \sum_{\substack{\phi_2 \in \pi_2(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \\ \mu(\phi_2)=1 \\ n_z(\phi_2)=0}} |\widehat{\mathcal{M}}(\phi_1)| |\widehat{\mathcal{M}}(\phi_2)| \mathbf{v} \right)$$

A fenti képletben a nemnulla együtthatójú  $\mathbf{v}$  elemek fokszáma 2-vel kisebb  $\mathbf{x}$  fokszámánál, azaz egy  $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ -hez tartozó modulustér két dimenziós. Az 5.27 állítás szerint  $\mathcal{M}(\phi)$  kompaktifikálható a

$$\coprod_{\phi = \phi_1 * \phi_2} \mathcal{M}(\phi_1) \times \mathcal{M}(\phi_2)$$

pontokkal. És így  $\widehat{\mathcal{M}}(\phi)$  1-dimenziós részsokaság, melynek végei a  $\phi = \phi_1 * \phi_2$  ( $\mu(\phi_1) = \mu(\phi_2) = 1$ ) felbontásokhoz tartoznak. Ezen felbontások épp  $\mathbf{v}$  együtthatóit adják. A köztük lévő utak pedig egy párosítást adnak az együtthatók között. Tehát, mivel  $\mathbb{Z}_2$  felett dolgozunk  $\mathbf{v}$  együtthatója 0, azaz  $\widehat{\partial} \mathbf{x} = 0$ .  $\square$

A homológia invariáciájához elég belátni, hogy invaráns a pontozott Heegaard műveletekre. Az  $\alpha$ - És  $\beta$ -görbék izotópiája egy egzakt Hamilton-izotópiáját indukálja a  $\mathbb{T}_\alpha$  illetve  $\mathbb{T}_\beta$  tóruszoknak  $\text{Sym}^g(\Sigma)$ -ban, és így a Lagrange-Floer elméletből következik, hogy az izotópia homotópikus ekvivalenciát definiál a lánckomplexuson. T. Perutz eredménye szerint ugyanez az elv alkalmazható a fogantycsúsztatásra is. A csúsztatott Heegaard diagrammhoz tartozó tórusz Hamilton-izotóp az eredeti tórussszal, és így a lánckomplexusok megint homotópikus ekvivalensek. Stabilizáció során a Heegaard diagramm összefüggő összegét képezzük  $S^3$  4.12. példabeli  $(T^2, \alpha_0, \beta_0)$  Heegaard diagrammjával. Már tudjuk, hogy a homológia független az izotópiától, ezért a bázispontot akárhova helyezhetjük. Tegyük fel, hogy az összefüggő összeget a  $z$ -t tartalmazó tartományban képezzük. Ekkor az  $x_0 = \alpha_0 \cap \beta_0$  metszéspont hozzáfűzése egy egy-egy értelmű megfeleltetést létesít a  $\widehat{CF}(\Sigma, \alpha, \beta, z)$  és a  $\widehat{CF}(\Sigma \# T^2, \alpha \cup \{\alpha_0\}, \beta \cup \{\beta_0\}, z)$  lánckomplexusok elemei között, sőt a bázispont lehelyezése miatt a határleképezést definiáló körlapok is megfeleltethetők egymásnak a két lánckomplexusban. Tehát a két lánckomplexus, és így a homológiájuk is izomrf. Ezzel beláttuk:

**tétel 6.5.** *Az  $Y$  3-sokaság Heegaard Floer homológiája:  $\widehat{HF}(Y) = \widehat{CF}(\Sigma, \alpha, \beta, \widehat{\partial})$  független az  $Y$  3-sokaságot definiáló megengedett, pontozott Heegaard diagramm választásától, és így egy 3-sokaság invariánst definiál.*  $\square$

**6.1. További Heegaard Floer homológiák.** Az előző fejezetben a lánckomplexus  $\mathbb{Z}_2$ -vektortér volt, megfelelő irányítás bevezetésével az egész elmélet  $\mathbb{Z}$ -modulusokra is elmondható. Csak arra kell vigyázni, hogy a  $\partial^2 = 0$  egyenlőség teljesüljön, az általánosítás többi része automatikus. Továbbmenve, a Heegaard Floer homológia definiálható olyan határleképezéssel is, mely metszi a bázisponthoz tartozó  $V_z = \{z\} \times \text{Sym}^{g-1}(\Sigma)$  divizort. Ekkor valahogy azt is számon kell tartanunk azt, hogy egy egy körlap hányszor metszette  $V_z$ -t, erre szolgál az  $U$  formális változó.

**definíció 6.6.** *A  $CF^\infty(\Sigma, \alpha, \beta)$  lánckomplexus alaphalmaza a  $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$  metszéspontok által generált  $\mathbb{Z}_2[U, U^{-1}]$ -modulus ( $\mathbb{Z}[U, U^{-1}]$ -modulus). A határleképezést pedig*

$a$

$$\partial^\infty \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta} \sum_{\substack{\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mu(\phi)=1}} |\widehat{\mathcal{M}}(\phi)| U^{n_z(\phi)} \mathbf{y}$$

egyenlőség definiálja a generátorokon. A Maslov gradálást  $M(U^a \mathbf{x}, \mathbf{x}) = -2a$ -val kiterjesztve,  $CF^\infty$  egy (relatíván) gradált lánckomplexus.

Megfelelő, úgynevezett erős megeengedett diagrammokra a fenti határleképezés lánckomplexust ad. Azonban a lánckomplexus homológiája,  $HF^\infty$ , racionális homológia gömbökre izomorf  $\mathbb{Z}_2[U, U^{-1}]$  Laurent-polinomgyűrűvel, úgyhogy nem szolgáltat érdekes invariánst. Szerencsére a  $z$  bázispont ad egy filtrálást a lánckomplexuson, és így tudunk még hasznos invariánsokat definiálni:

**definíció 6.7.** Jelölje  $CF^-(\Sigma, \alpha, \beta)$  a metszéspontok által generált  $\mathbb{Z}_2[U]$ -modulust, ekkor mivel a holomorf reprezentással rendelkező  $\phi$  körlapokra  $n_z(\phi) \geq 0$ , így  $CF^-(\Sigma, \alpha, \beta)$  részkomplexusa  $CF^\infty(\Sigma, \alpha, \beta)$ -nak.  $CF^+(\Sigma, \alpha, \beta)$  jelölje a faktort:

$$CF^+(\Sigma, \alpha, \beta) = \frac{CF^\infty(\Sigma, \alpha, \beta)}{CF^-(\Sigma, \alpha, \beta)}.$$

A lánckomplexusok által definiált homológiák  $HF^-(\Sigma, \alpha, \beta)$  és  $HF^+(\Sigma, \alpha, \beta)$ .

A fenti homológiák 3-sokaság invariánsokat definiálnak:

**tétel 6.8.** Az  $Y$  3-sokaság Heegaard Floer homológiái:  $HF^-(Y) = CF^-(\Sigma, \alpha, \beta, \partial)$  és  $HF^+(Y) = CF^+(\Sigma, \alpha, \beta, \partial)$  független az  $Y$  3-sokaságot definiáló erős megeengedett, pontozott Heegaard diagramm választásától, és így egy 3-sokaság invariánst definiál.  $\square$

**6.2. A Heegaard Floer homológia számíthatósága.** A index formulának köszönhetően  $\widehat{HF}$  (sőt ennek általánosításai is) kombinatorikusan számítható. Sarkar és Wang tétele szerint amennyiben egy Heegaard diagram a  $z$ -t tartalmazó tartományon kívül csak két- ill. négyszöget tartalmaz (az ilyen diagrammokat szépek nevezték el), akkor minden  $\widehat{\partial}$  során figyelembevett holomorf diszk tartománya kétszög illetve négyszög lesz. A majdnem komplex struktúrától függetlenül mind a kétszögeknek, és a négyszögeknek (az  $\mathbb{R}$ -hatással való faktorizálás után) egyértelmű holomorf reprezentánsa van, azaz  $|\widehat{\mathcal{M}}(\phi)| = 1$ . Tehát a határleképezés kiszámítása a Heegaard diagramon való két pontot összekötő kétszögek és négyszögek számlálására redukálódik. Szintén Sarkar és Wang eredménye, hogy bármely diagramm izotópia és fogantyúcsúsztatás segítségével széppé tehető, és így  $\widehat{HF\widehat{K}}$  valóban számítható kombinatorikus eszközökkel. Az algoritmus során kapott szép diagrammok azonban általában egyáltalán nem "szépek": nagyon sok metszéspontot tartalmaznak. Érdekes kérdés, hogyha definiálható-e a Heegaard Floer homológia kombinatorikusan. Ozsváth, Stipsicz és Szabó belátta, hogy a vizsgált Heegaard diagramok szűkítésévé  $\widehat{HF}$  esetében ez is lehetséges.

## 7. ALKALMAZÁSOK

A Heegaard Floer homológiának számos alkalmazása van, pl. kontakt struktúrák invariánsait is lehet a segítségével definiálni. Sőt az elméletnek van csomóinvariánst és 4-dimenziós invariánst adó változata is. A továbbiakban az utóbbi kettőről ejtünk néhány szót. Ennek a fejezetnek, főleg a 4-sokaságokról szóló alfejezetnek a tárgyalása kevésbé bevezetőjellelű, és bizonyos -itt nem tárgyalt- előismereteket is feltételez.

**7.1. Csomók.** Ha egy Heegaard diagrammon két bázispontot adunk meg, akkor a  $(\Sigma, \alpha, \beta, z, w)$  Heegaard diagrammhoz egy új határleképezés definiálható  $\widehat{CF}(\Sigma, \alpha, \beta)$ -n az olyan holomorf körlapok segítségével, melyek egyik bázisponton sem mennek át:

$$\partial \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta} \sum_{\substack{\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mu(\phi)=1 \\ n_z(\phi)=n_w(\phi)=0}} \left| \widehat{\mathcal{M}}(\phi) \right| \mathbf{y}.$$

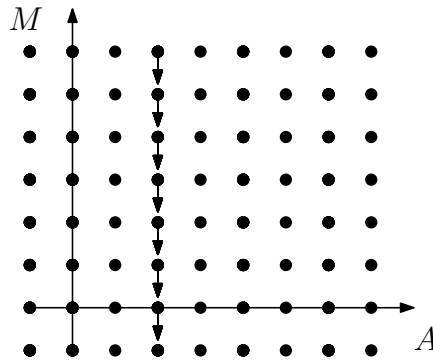
A fentiekhez hasonlóan  $(\widehat{CF}(\Sigma, \alpha, \beta), \partial)$  egy lánckomplexust ad, és így definiálható a homológiája. Azonban az ugyanazt a 3-sokaságot reprezentáló Heegaard diagrammokat nem lehet összekötni “kétszer pontozott” Heegaard lépésekkel összekötni. Ennek az az oka, hogy a Heegaard diagramm a két bázisponttal már nem csak a 3-sokaságot, hanem egy benne lévő csomót is elkódol a következőképpen. Mivel  $\Sigma - \cup \alpha$  és  $\Sigma - \cup \beta$  körlapok, így lényegében egyértelműen létezik egy  $z$ -t  $w$ -vel összekötő görbe  $a \subset \Sigma - \cup \alpha$ -ban, és egy  $w$ -t  $z$ -vel összekötő görbe  $b \subset \Sigma - \cup \beta$ -ban. Az  $\alpha$ -görbék nem metsző  $a$  görbe belső pontjait egy kicsit  $U_1$ -be, és a  $b$  görbe belső pontjait egy kicsit  $U_2$ -be tolvaa  $a * b$  egy  $K$  csomót definiál, mely épp  $z$ -ben és  $w$ -ben metszi a Heegaard felületet. Minden 3-sokaságban bármely csomót lehet kétszer pontozott Heegaard diagrammal megadni (Ilyet pl. a csomót az 1-vázában tartalmazó triangulációból képzett Heegaard diagrammal lehet konstruálni), sőt:

**tétel 7.1.** *Ha a  $(\Sigma, \alpha, \beta, z, w)$  és a  $(\Sigma', \alpha', \beta', z', w')$  megengedhető Heegaard diagrammjai az  $(Y, K)$  3-sokaságnak, csomó párnak, akkor kétszer pontozott Heegaard műveletekkel megengedhető Heegaard diagrammokon keresztül egymásba vihetők.  $\square$*

E tétel alapján, belátható, hogy a kapott homológia független a használt kétszer pontozott Heegaard diagrammtól, ez a homológia a  $K$  csomó csomó Floer homológiája, és jelöljük ezt  $\widehat{HF}K(Y, K)$ -nal. Ha a  $K$  csomó határol egy felületet  $Y$ -ban, akkor az  $M$  Maslov gradáláson kívül definiálható egy újabb (relatív) gradálás, az Alexander gradálás. Két metszéspont  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$  gradáláskülönbsége:

$$A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{y}) = n_z(\phi) - n_w(\phi).$$

A fenti képletben  $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  tetszőleges, és persze fel kell tennünk, hogy  $\pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq \emptyset$ , azaz  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{y}$  ugyanabban a  $\text{spin}^c$ -struktúrában van. A Seifert-felület létezése a fenti képlet jóldefiniáltságához szükséges. A differenciál  $\partial$  a Maslov gradálást  $(M(\mathbf{x}) - M(\mathbf{y}) = \mu(\phi) - 2n_z(\phi) = 1 - 2 \cdot 0)1$ -gyel, az Alexander gradálást pedig  $(A(x) - A(y) = n_z(\phi) - n_w(\phi) = 0 - 0)$  nem csökkenti. Azaz, az  $(A, M)$ -koordinájú síkon  $\partial$  függőlegesen 1-et megy lefele (18). Mivel a határleképezés az Alexander

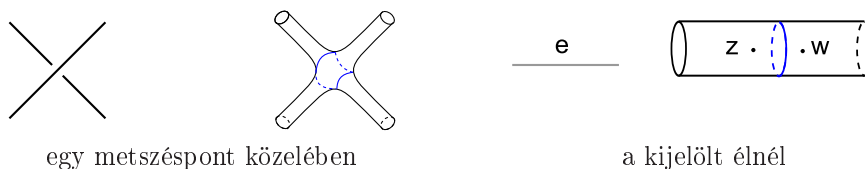


ÁBRA 18. A határleképezés

gradálást nem változtatja, így a lánckomplexus felbomlik, és minden Alexander gradálásra ad egy lánckomplexust. Így két (relatív) gradálást adva  $\widehat{HFK}(Y, K)$ -n:

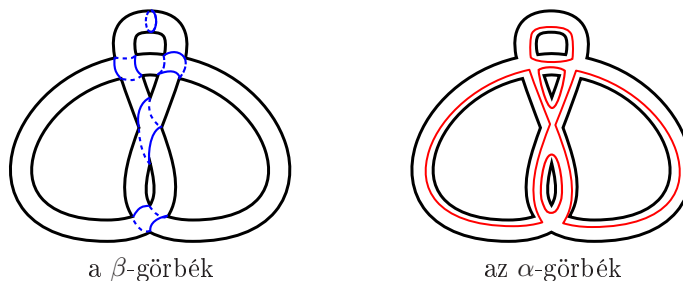
$$HFK(Y, K) = \oplus \widehat{HFK}_M((Y, K), A)$$

Mostantól csak  $S^3$ -beli csomókról lesz szó.  $S^3$ -ban minden csomónak van Seifert felülete, azaz minkét gradálás jóldefiniált. Mivel minden  $S^3$ -beli, így innentől a csomó Floer homológiában nem jelöljük az alapteret, és  $\widehat{HFK}(S^3, K)$  helyett egyszerűen  $\widehat{HFK}(K)$ -t írunk. Egy  $D$  diagrammhoz természetes módon tudunk egy Heegaard diagramot rendelni a következőképpen. A diagrammhoz tartozó  $V$  vetület (tehát amikor elfelejtjük az alul-felül információt) környezete  $S^3$ -ban egy  $n+1 (= \text{cr}(V)+1)$ -génuszú fogantyú:  $U_2$ . Komplementere pedig szintén egy  $(n+1)$ -génuszú fogantyú:  $U_1$ . A Heegaard felület  $\Sigma$  legyen az  $(n+1)$ -fogantyúk közös határa. Jelöljük ki a  $V$  vetület egy  $e$  élét. Minden metszéspont környezetében megadunk egy  $\beta$ -görbét a 19. ábra baloldalának megfelelően. Ez eddig  $n$  darab  $\beta$ -



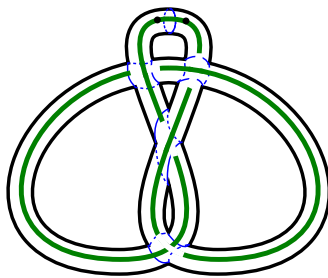
ÁBRA 19. A  $\beta$  görbék a Heegaard diagramon.

görbe. Legyen  $\beta_{n+1}$  az  $e$  élhez tartozó meridián (19. ábra baloldala). A megadott  $\beta$ -görbék körlapokat határolnak  $U_2$ -ben. A csomót követve pedig látszik, hogy  $\Sigma - \beta$  összefüggő, azaz a görbék lineárisan függetlenek  $H_1(\Sigma)$ -ban, és így a  $\beta$ -görbék tényleg az  $U_2$  tömör fogantyút adják meg. A 20. ábra a  $\beta$ -görbékét ábrázolja a nyolcascsomóhoz:



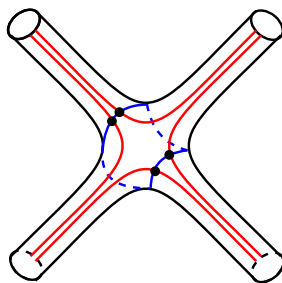
ÁBRA 20. Heegaard diagram a nyolcascsomóhoz.

A vetület  $n+2$  tartományának határai egy-egy görbét határolnak  $\Sigma$ -n, melyek persze körlapokat határolnak  $U_1$ -ben. A kijelölt  $e$  éllel határos egyik tartomány határát elhagyva  $n+1$   $H_1(\Sigma)$ -ban lineárisan független görbét kapunk, melyek leírják  $U_1$ -et. Legyenek ezek az  $\alpha$ -görbék, és ezek közül legyen  $\alpha_{n+1}$  az  $e$ -vel határos tartomány határát. A nyolcascsomóhoz tartozó  $\alpha$ -görbékét a 20. ábra jobboldala szemlélteti. A két bázispontot pedig rakjuk a  $\beta_{n+1}$ -görbe két oldalára. Ekkor a megadott  $(\Sigma, \alpha, \beta, z, w)$  kétszer pontozott Heegaard diagramm valóban a csomót adja meg: a  $w$ -t  $z$ -vel összekötő szakasz egy rövid  $\beta_{n+1}$ -re transzverzális szakasz, a  $\beta$ -görbék komplementumában haladó görbének azonban végig követnie kell a csomót. A nyolcascsomó esetében a definiált csomót a 21 ábra szemlélteti. A  $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$  generátorok meghatározásához vegyük észre, hogy  $\beta_{n+1}$ -et, csak  $\alpha_{n+1}$  metszi, így ezt minden generátornak tartalmaznia kell. A többi  $\beta$ -görbe, a metszéspontok környezetében megy, és azon  $\alpha$ -görbékét metszi, melyek által határolt



ÁBRA 21. A csomó megtalálása a Heegaard digramban.

tartománynak csúcsa a metszéspont (22. ábra). Azaz az egyik metszet kiválasztása



ÁBRA 22. A generátorok egy metszéspont közelében.

megfelel, egy a metszéspont melletti tartomány kiválasztásának, és így egy generátor  $n$  ilyen választásnak, azaz épp egy Kauffmann állapotnak felel meg.  $S^3$ -ban mind az Alexander, mind a Maslov gradálás abszolúttá tehető:

$$A(\mathbf{x}) = \sum A(x_i) \quad \text{és} \quad M(\mathbf{x}) = \sum M(x_i)$$

ahol  $A(x_i)$  és  $M(x_i)$  a 4 ábra szerint szerint számítható. Annak ellenőrzése, hogy a fenti képletek valóban a relatív gradálások felemeltjei bonyolult, és itt nem is részletezzük. Számítsuk ki a csomó Floer homológiákat az összes gradálásban, és tekintsük a

$$\sum_A \sum_M (-1)^{A \operatorname{rk}(\widehat{HFK}_A(K, M))} T^M$$

polinomot. Ez a polinom tehát a rögzített Alexander-gradálásokhoz tartozó homológiák Euler karakterisztikáinak  $T^A$ -szorosának formális összege. Mivel egy lánckomplexus, és a hozzátartozó homológiák Euler karakterisztikája megegyezik, így ez a polinom:

$$\sum_A \sum_M (-1)^{A \operatorname{rk}(\widehat{CFK}_A(K, M))} T^M$$

amely pedig épp az Alexander polinom:

**tétel 7.2.** *Tetszőleges  $K$  csomóra:*

$$\sum_A \sum_M (-1)^{A \operatorname{rk}(\widehat{HFK}_A(K, M))} T^M = \Delta_K(T).$$

A fenti tétel épp azt mondja, ki, hogy a csomó Floer homológia az Alexander polinom kategorifikáltja. Azonban a csomó Floer homológia többet érzékel a csomóból, mint az Alexander polinom. Kiszámítható belőle a csomó génusza:

**tétel 7.3.** *Tetszőleges  $K$  csomóra a csomó génusza:*

$$g(K) = \max\{A : \exists M : \widehat{HF}K_A(K, M) \neq \{0\}\}.$$

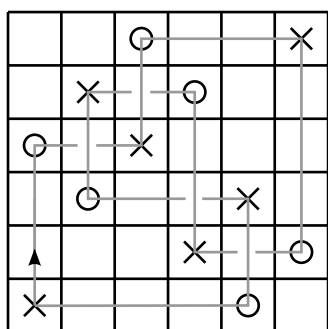
Sőt a csomó fibráltsága is megállapítható a csomó Floer homológia segítségével:

**tétel 7.4.** *Egy  $K$  csomó pontosan akkor fibrált, ha a  $\widehat{HF}K_{g(K)} = \mathbb{Z}_2$ .*

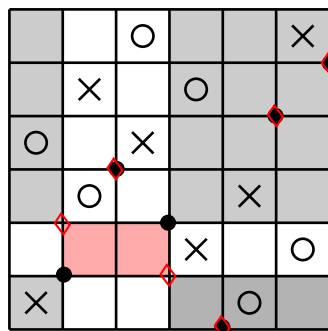
**7.2. A csomó Floer homológia számíthatósága – Rácsdiagramok.** A Heegaard Floer homológia,  $\widehat{HF}$ -hez hasonlóan,  $\widehat{HF}K$  is kombinatorikusan számítható, és ez a számítás  $S^3$ -ban a rácsdiagrammok segítségével teljesen elemi. Az elmélet a Heegaard Floer homológia definíciójának, egy általánosításán múlik, amikor a használt Heegaard diagrammok a Heegaard felület génuszánál több  $\alpha$ - és  $\beta$ -görbét, és több bázispontot tartalmaznak. Pontosabban, legyen  $\Sigma$  egy  $g$  génuszú felület,  $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{g+k-1}\}$ ,  $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_{g+k-1}\}$  görbék  $\Sigma$ -n, melyek komplementere  $\Sigma - \alpha$  és  $\Sigma - \beta$   $k$ - $k$  darab körlap. Helyezzünk a felületre  $k$  darab bázispontot,  $\mathbf{z} = \{z_1, \dots, z_k\}$ , úgy, hogy mind a  $\Sigma - \alpha$  komplementer  $k$  körlapjában, mind a  $\Sigma - \beta$  komplementer  $k$  körlapjába épp 1-1 pont kerüljön. Ekkor a  $(\Sigma, \alpha, \beta, \mathbf{z})$  egy több bázispontú Heegaard diagram, és az általa meghatározott sokaság (amely fogantyúiban tehát az  $\alpha$ - ill.  $\beta$ -görbék körlapokat határolnak) egyértelmű. A több bázispontú Heegaard diagram analóg módon definiálható csomók esetében is. A diagram ebben az esetben két bázispontkészletet tartalmaz:  $(\Sigma, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z})$ , és a csomót a  $\mathbf{z}$ -t,  $\mathbf{w}$ -vel  $\Sigma - \alpha$ -beli, és a  $\mathbf{w}$ -t  $\mathbf{z}$ -vel  $\Sigma - \beta$ -beli ívek a fogantyúkba tolt összefűzéséből áll. Az ilyen diagrammokra is definiálhatóak a Heegaard lépések, és különösebb nehézségek nélkül a Heegaard Floer homológia is általánosítható, sőt lényegében az eredeti Heegaard Floer homológiát adja vissza. A több bázisponttal rendelkező Heegaard diagramok jelentősége abban rejlik, hogy bizonyos esetekben, mint például az  $S^3$ -beli csomók esetében, ezek egyszerűbben kezelhetők. Most ideiglenesen áttérünk a csomók egy teljesen kombinatorikus tárgyalására.

**definíció 7.5.** *Egy  $n \times n$ -es rács négyzeteiben adott  $n$  darab  $X$  és  $n$  darab  $O$  egy rácsdiagramot ad meg, ha minden sorban és oszlopban pontosan egy  $X$  ill./  $O$  van.*

Kössük össze vízszintes szakaszokkal az  $X$ -eket az  $O$ -kal, és függőlegesen az  $O$ -kat az  $X$ -ekkel, úgy, hogy mindig a függőleges szakasz van felül. A kapott a diagramm (a sarkok simítása után) egy láncdiagramot ad meg. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban csak olyan rácsdiagramokkal foglalkozunk, melyek egy komponensű láncot, azaz csomót adnak meg. A nyolcascsomót leíró rácsdiagramot a ?? ábra szemlélteti. Ha a rácsnégyzet alsó-felső és jobboldali-baloldali éleit azonosítjuk egy



Rácsdiagram a nyolcascsomóhoz.



két generátort összekötő 2db téglalap.

ÁBRA 23. Rácsdiagram a nyolcascsomóhoz.

tóruszt kapunk, és a függőleges és vízszintes rácsvonalak zárt körökké zárulnak



össze. A kapott tórusz mint Heegaard felület, és a vízszintes körök mint  $\alpha$ -, a függőleges körök mint  $\beta$ -görbék  $S^3$  egy  $(T^2, \alpha, \beta)$  Heegaard diagramját adják. A Heegaard diagramon, az  $X$ -ek játszóak a  $z_i$ -k, az  $O$ -k pedig a  $w_i$ -k szerepét. Így egy a rácsdiagram által leírt csomóhoz tartozó Heegaard diagramot kapunk.

A generátorok megfelelnek az olyan rács  $n$ -eseknek, melyek pontjai minden vízszintes, illetve függőleges rácsvonalat elfoglalnak. Mivel a diagram szép, így az  $\mathbf{x}$  generátor határában  $\mathbf{y}$  akkor fordulhat elő, ha  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{y}$  pontosan két koordinátában különbözik. Ekkor  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{y}$  különböző koordinátái négy pontot határoznak meg, melyek négy rácsnégyzetet feszítenek ki (23. ábra), ezek közül kettőnek van  $\mathbf{x}$  a balalsó ill. jobbfelső sarkában. Azt mondjuk, hogy ez a két téglalap összeköti  $\mathbf{x}$ -et  $\mathbf{y}$ -nal (a másik két téglalap  $\mathbf{y}$ -t köti össze  $\mathbf{x}$ -szel). Egy téglalap üres, ha a belsejében nem tartalmaz sem  $X$ -et, sem  $O$ -t, sőt  $\mathbf{x}$  (vagy  $\mathbf{y}$ ) egyetlen pontját sem. Az index formula szerint épp az üres téglalapok azok, amelyek a határleképezésbe beleszámítanak. Jelölje az  $\mathbf{x}$ -et  $\mathbf{y}$ -nal összekötő üres téglalapok halmazát  $\mathcal{R}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Ez a halmaz egy, vagy nulla elemű. Az eddigiek alapján tehát:

$$\partial \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta} |\mathcal{R}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \mathbf{y}.$$

A holomorf elméletből már tudjuk, hogy ezzel a határleképezéssel  $(\widehat{CF}, \partial)$  lánckomplexust ad, ebben az esetben azonban ennek bizonyítása lényegesen egyszerűbb, kombinatorikus. Sőt a Reidemeister lépések általánosításaként megadható a rácsdiagramoknak olyan változtatásai, melyek bármely két, ugyanazt a csomót definiáló rácsdiagramot egymásba visznek. Ezen lépések halmaza, ebben az esetben is hasznos, és segítségével kombinatorikusan be lehet látni, hogy egy csomóinvariánst kapunk, mely a rácsdiagram méretére is emlékszik (az invariáns tenzorszorzódik  $\mathbb{Z}_2^{\otimes 2}$ -vel ha eggyel növeljük a rács méretét). A holomorf elméletből ekkor pedig következik, hogy az invariáns a csomó Floer homológia stabilizáltja:

**tétel 7.6.** *Ha egy  $n \times n$ -es rácsdiagram a  $K$  csomót írja le, akkor a fent definiált lánckomplexus homológiája:*

$$H_*(\widehat{CF}, \partial) = \widehat{HFK}(K) \otimes \mathbb{Z}_2^{\otimes 2(n-1)}.$$

**7.3. 4-sokaságok.** A Heegaard Floer homológiáknak van egy 4-dimenziós változata is, első közelítésben kobordáns sokaságok Heegaard Floer homológiái között lehet egy leképezést definiálni:

**definíció 7.7.** *Legyen  $Y_1$  és  $Y_2$  két 3-sokaság, a  $W$  4-sokaság egy  $Y_1$ -et  $Y_2$ -vel összekötő kobordizmus, ha  $\partial W = Y_2 \cup -Y_1$ . A kobordizmust  $Y_1 \xrightarrow{W} Y_2$ -vel jelöljük.*

**tétel 7.8.** *Legyen  $W$  az  $Y_1$ -et,  $Y_2$ -vel összekötő kobordizmus, ekkor a Heegaard Floer homológiák bármely változatára definiálható egy:*

$$F_W : HF^*(Y_1) \rightarrow HF^*(Y_2)$$

leképezés. □

A leképezés konstrukciója azon múlik, hogy minden kobordizmus fogantyúkra bontható fel (ezek a fogantyúk nem egyeznek meg az eddig tárgyalt tömör  $g$ -fogantyúkkal, és most el is tekintünk a pontos definíciótól). Az egyes fogantyúra-gasztáshoz tartozó leképezéseket, könnyű definiálni, az egész kobordizmushoz tartozó leképezés ezek után az ilyenek kompozíciójaként áll elő. Az hogy az így definiált leképezés független a választott fogantyúfelbontástól megint a szokásos trükkön múlik: megadhatóak az ugyanazt a kobordizmust leíró fogantyúfelbontások közötti lépések, amelyre belátható az invariancia. Ezek után a naiv definíció egy zárt  $X$

4-sokaság Heegaard Floer homológiájára az lenne, hogy kivágunk  $X$ -ből két golyót, és tekintjük az így definiált:

$$F_{X-B^4-B^4}: \text{HF}^*(S^3) \rightarrow \text{HF}^*(S^3)$$

leképezést, mely ha  $\mathbb{Z}$  együttthatókkal dolgozunk, akkor pl.  $\widehat{HF}(S^3) = \mathbb{Z}$  miatt, egy  $n \mapsto a \cdot n$  leképezés, és így  $a$  a 4-sokaság egy invariánsa. Ez az invariáns azonban, ha  $b_2^+(X) = 0$ , akkor még  $\text{HF}^\infty$  esetében (amikor tehát  $\text{HF}^\infty(S^3) = \mathbb{Z}[U, U^{-1}]$ , és a homomorfizmust egy Laurent polinom ad meg) is 0. Így az invariáns definíciója, épp ennek felhasználásával történik, de bonyolultabb, és csak olyan 4-sokaságokra definiált, amelyekre  $b_2^+(X) > 1$  (ez a feltétel a Seiberg-Witten invariánsok definíciójához is szükséges). A konstrukció a sokaság két részre vágásán múlik, és végülis egy  $\text{HF}^- \rightarrow \text{HF}^+$  leképezést ad. A  $\text{Spin}^c$  struktúrák 4-sokaságokra is definiálhatóak, és a 4-sokaságokon adott  $\text{Spin}^c$  struktúrák  $\text{Spin}^c$  struktúráként szorúlnak meg a peremekre. A fenti leképezések mind felbomlanak  $\text{Spin}^c$ -struktúrák szerint. Így a Seiberg-Witten invariánsokhoz hasonlóan  $X$  minden  $\text{Spin}^c$ -struktúrájára ad egy-egy invariánst.

**7.4. Műteti egzakt háromszög.** Annak ellenére, hogy a Heegaard Floer homológia kombinatorikusan számítható, bonyolultabb 3-sokaságokra maguk a számítások még továbbra sem kivitelezhetőek, még számítógép segítségével sem. A műteti egzakt háromszög segítségével, a számításokat néha indukció-szerű eljárással lehet helyettesíteni. A konstrukció azon múlik, hogy minden 3-sokaság  $S^3$ -beli láncok menti műtétekkel kapható. Legyen  $K$  egy csomó és  $N(K)$  egy csőszerű környezete egy  $Y$  3-sokaságban. A  $\partial N(K)$  tóruszon a meridián az a  $\mu$  görbe, mely körlapot határol  $N(K)$ -ban, ez izotópia erejéig jóldefiniált. A csomó,  $\lambda$ , tüskézése egy a meridiánt egy pontban metsző görbe a tórusz felületén. Ez nem egyértelmű, de ha a csomó nullhomológ, azaz határol felületet, akkor általában azt a görbét szokás választani, amely  $Y - N(K)$ -ban határol körlapot. Ez a csomó Seifert-tüskézése. A csomó irányítása irányítja a tüskézést, és a meridiánt is. Az  $Y - N(K)$  3-sokaság peremes határa egy tórusz, így egy tömör tórusz beragasztásával a sokaság ismét zárttá tehető. Mint azt a tömör fogantyúk leírásánál láttuk a ragasztáshoz megadásához elegendő fixálni a meridián (a tömör tóruszban körlapot határoló görbe) képét. Ez pedig egy görbe  $\partial Y$ -on, melyet a tüskézés fog megadni.

**definíció 7.9.** Az  $Y$  3-sokaságból a  $(K, \lambda)$  tüskézett csomó menti műtét az

$$Y_\lambda(K) = Y - N(K) \cup_{T^2} D^2 \times S^2$$

3-sokaságot képz, ahol a peremek azonosítása a  $\partial D^2 \times \{1\} \rightarrow \lambda$  diffeomorfizmussal történik.

Egy műtét egyértelműen megad egy  $Y \xrightarrow{W_{(K, \lambda)}} Y_\lambda(K)$  kobordizmust is, melyet a  $(K, \lambda)$  menti fogantyúragasztással kapunk  $Y \times I$ -ből. Legyen  $\lambda, \kappa$  két egymást egy pontban metsző tüskézése a  $K$  csomónak, úgy hogy  $(\mu, \lambda)$  és  $(\kappa, \lambda)$  ugyanazt az irányítást adják  $T^2$ -nek. A két tüskézés definiálja kobordizmusoknak egy háromszögét:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{W_0} & Y_\lambda(K) \\ & \swarrow W_2 & \searrow W_1 \\ & & Y_\kappa(K) \end{array}$$

ahol  $W_0 = W_\lambda(K)$ , és a többi kobordizmus is műtétekhez tartozik (de nem  $K$  mentiekhez). A fenti háromszöghöz tartozó leképezések a Heegaard Floer homológiákon egy egzakt háromszöget indukálnak.

**tétel 7.10.** *A fenti jelölésekkel*

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{HF}(Y) & \xrightarrow{F_{W_0}} & \widehat{HF}(Y_\lambda(K)) \\
 & \swarrow F_{W_2} & \searrow F_{W_1} \\
 & \widehat{HF}(Y_\kappa(K)) &
 \end{array}$$

*háromszög egzakt.*

Ennek a tételnek segítségével számítható pl. a 4.15. példában definiált  $Y_n$  háromsokaságok homológiái.  $Y_n$  a háromlevelű csomó menti  $n - 4$  (azaz a  $\lambda + (n - 4)\mu$  görbe menti) mûtét eredménye.

#### IRODALOMJEGYZÉK

- [1] I. G. MacDonald. Symmetric products of an algebraic curve. *Topology*, 1:319–343, 1962.

MTA RÉNYI INTÉZET, BUDAPEST, REÁLTANODA UTCA 13–15.  
*E-mail cím:* [vvertesi@renyi.hu](mailto:vvertesi@renyi.hu)