Algebraïsche Geometrie voor de echte leken

Dennis Westra

3 maart 2007

1 Introductie

Als wetenschapper wordt je wel eens gevraagd, zij het informeel, zij het drukkend, om eens uit te leggen wat je nou eigenlijk doet. Vooral de belastingbetaler, of hij die zich als belastingbetaler zwaar overbelast ziet, wil graag weten waar zijn centen aan uitgegeven worden. Nu is dat alleen op zich een hele discussie waard, maar daarover kom ik in een ander artikel zeker terug. Nu wil ik vooral de behoefte van de welwillende belastingebetaler een beejte bevredigen en een klein beetje uitleggen wat ik momenteel voor wetenschap bedrijf, en waar dat in hemelsnaam goed voor is. Ik heb expres 'welwillend' toegvoegd, want de lezer zal wel een klein beetje zich moeten inspannen om mij te kunnen volgen in het geval dat de lezer niet vaker is blootgesteld aan de hieronder uitgelegde concepten. Maar ervan uitgaande dat het inzicht in het zwarte gat waar zoveel belastinggeld in zou verdwijnen voldoende begerenswaardig is, zal ik verderop in de tekst niet alledaagse concepten introduceren en een beroep doen op het vermogen van de lezer zich enigszins in te spannen alswel het vermogen van de lezer om na te denken.

Nu is wiskunde al een heel oude wetenschap en is ook al jaren niet slechts gebuikt om een verheven tijdverdrijf te verschaffen, maar ook om het leven van de mens aangenamer te maken (let wel, dat was dus het doel). Zo gebruikten Inca's, Egyptenaren, Babyloniërs en vele anderen wiskunde om gebouwen te construëren of land te verdelen. Zo was de stelling van Pythagoras al bekend bij de Egyptenaren en werd gebruikt bij herverkavelingen, die toen zeker vaak nodig waren gezien de aanwezigheid van de Nijl en haar neiging regelmatig over te stromen. Tegenwoordig kunnen we met de wiskunde veel meer. Zonder wiskunde had de technologie nooit haar huidige status bereikt. Maar ook het functioneren van de overheid, waaronder dus al het gedoe met belastinggeld, was onmogelijk zonder een degelijke portie wiskunde.

Vele denken bij wiskunde aan lastige formules bedenken. Dat is natuurlijk een fout beeld. Wiskunde is het nadenken volgens strakke denkregels, en de taal die daarbij het handigst lijkt te zijn, is de taal van formules. Een formule is een bewering geschreven in een taal waar woorden geen rol spelen. Bijvoorbeeld, de alledaagse uitspraak dat 'twee appels' meer appels zijn dan 'een appel', zou ik uitdrukken als '$2 > 1$'; kort en bondig niet? En je ziet ook meteen dat het niet alleen voor appels geldt.

Een ander concept waar vaak met gruwel over gesproken wordt bij de herinnering aan wiskunde is het begrip 'vergelijking'. Een vergelijking is eigenlijk een puzzel. In de kranten is de oplossing van de Sudoku puzzels meestal uniek, maar in de wiskunde is dat niet nodig. Het is juist een hele kunst af en toe te bewijzen dat er voor een gegeven puzzel maar één mogelijke oplossing is. Als je dan een oplossing hebt gevonden, ben je ook klaar, want er zijn niet meer oplossingen. Bij het oplossen van een kruiswoordraadsel kom je misschien wel vaker tegen dat ergens twee mogelijkheden zijn. Soms zijn er ook geen oplossingen; in de praktijk vinden we dan dat de puzzel verkeerd is.

De wiskunde waar ik me nu mee bezig houd is algebraïsche geometrie. In dat gebied zijn de vergelijkingen erg belangrijk en over het algemeen zijn er meer oplossingen. De vergelijkingen zijn van een bijzonder soort; het zijn algebraïsche vergelijkingen. Het vinden van oplossingen, het analyseren van hoeveel oplossingen er zijn en het beschrijven van de eigenschappen van de oplossingen is eigenlijk de tak van sport die ik hier bedrijf. Deze algebraïsche vergelijkingen kennen veel toepassingen (onder andere omdat computers makkelijk met algebraïsche berekeningen kunnen omgaan) en worden ook veel gebruikt in andere takken van de wiskunde, maar ook in de natuurkunde, scheikunde en economie.

In de volgende secties zal ik proberen kort, duidelijk en met voorbeelde uit te leggen wat dat nu ongeveer inhoudt. De lezer die bovenstaande al voldoende verduidelijking vindt over het hoe en wat van het belastinggeld-zwarte-gat, kan hier gerust ophouden met lezen. De lezer die toch nog even wat details wil weten wordt aangespoord om verder te gaan.

2 Getallen

Getallen kennen we allemaal, toch? Toch is het concept van getallen niet altijd makkelijk. Zo is het getal 'nul' door de Romeinen niet echt begrepen, en het was de Indus-bevolking die het heeft uigevonden om aan te duiden dat iemand geen schulden meer had. Na de getallen $0, 1, 2, 3, \ldots$ leert men dat er ook breuken bestaan en zelfs negatieve getallen. Laten we de verzamelingen van alle getallen die je als een breuk kan schrijven, zij het positief, zij het negatief, aanduiden als $\mathbb{Q}$. Dat is dus een verzameling met allemaal objekten, namelijk de breuken. De gehele getallen zijn de getallen van de vorm -7 1 en 100, ofwel, breuken waar in de noemer 1 staat. In het bijzond er zijn gehele getallen dus ook breuken.

Eigenlijk bezit $\mathbb{Q}$ nog meer eigenschappen dat dat het een verzameling is. We kunnen namelijk breuken bij elkaar optellen en van elkaar aftrekken en met elkaar vermenigvuldigen en door elkaar delen (mits we niet delen door nul), en het resultaat is nog steeds een breuk. Dus we kunnen allerlei dingen met die objekten in $\mathbb{Q}$ doen en we lopen er nooit uit. Voor gehele getallen is dat niet zo. Als we gehele getallen optellen en aftrekken, is het resultaat een geheel getal, maar als we 1 delen door 2 is het resultaat geen geheel getal.

Toch kwamen de Grieken er al vroeg bij dat er acties mogelijk waren zodanig dat je wel uit de verzameling $\mathbb{Q}$ kon lopen. Neem bijvoorbeeld een vierkant met zijden van lengte 1, dan weten we allemaal wel dat de diagonaal lengte

$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ heeft. En laat dat getal nou net geen breuk zijn! Het is onmogelijk om gehele getallen a en b te vinden zodanig dat $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$. Wel kunnen we $\sqrt{2}$ benaderen door een breuk: $\sqrt{2}=1,41\ldots\cong\frac{141}{100}$.

Nu kom ik dan bij de vergelijkingen. Ik schrijf meteen maar eentje op en verklaar daarna wel wat alles is:

$$X^2-2=0\,. \tag{1}$$

De getallen 0 en 2 behoeven hopelijk geen uitleg. De X natuurlijk wel. Wat is X??? Eigenlijk is bovenstaande vergelijking de volgende puzzel: vind een objekt zodanig dat als ik het kwadrateer en dan er twee vanaf haal, dat ik dan op nul uitkom. Het objekt wat we nog niet kennen is dan even kort met X aangeduid. Natuurlijk heeft de vraag geen zin zonder te specificeren wat voor objekten je eigenlijk zoekt. Koeien? Probeer maar eens een koe te kwadrateren, zal die leuk vinden. Pandaberen? Snoepjes? Kabinetten onder Balkenende? We moeten dus een verzameling specificeren waar we onze X in mogen zoeken. Soms is dat te veel gevraagd en kun je beter een groepje verzamelingen aanduiden waaruit je je oplossing mag halen.

Voor bovenstaande vergelijking kunnen we bijvoorbeeld proberen om een oplossing te vinden in de natuurlijke getallen. Nu is $0^2=0$, $1^2=(-1)^2=1$, $(-2)^2=2^2=4$ en als we getallen nemen die nog groter zijn dan 2 of nog kleiner dan -2, wordt het verschil met 2 nog groter, dus zo vinden we nooit een oplossing in de verzameling van gehele getallen. De Grieken vonden dus al dat er geen breuk was zodanig dat het kwadraat 2 is, en dus weten we ook dat er geen oplossingen in $\mathbb{Q}$ zijn. Wat voor getal is de oplossing dan? We weten allemaal vast nog wel dat we de oplossing altijd makkelijk kunnen opschrijven als $X=\sqrt{2}$, maar ook $X=-\sqrt{2}$ is een oplossing. Het getal $\sqrt{2}$ wordt een reëel getal genoemd. De verzameling van reële getallen is wat moeilijk te definiëren, maar de meeste denkbare getallen zijn reële getallen. Als vuistregel geldt dat als je het kan benaderen met je rekenmaschine, dan is het een reëel getal.

Algebraïsche vergelijkingen zijn vergelijkingen van bovenstaande vorm, maar ze kunnen gecompliceerder zijn:

$$X^2Y^3+Y^5-\tfrac{1}{2}X^3+5=0\,. \tag{2}$$

Hier wordt dus niet naar één objekt X gezocht maar naar twee, namelijk een X en een Y, zodanig dat de vergelijking kloppend is. Ik zal geen precieze definitie geven van een algebraïsche vergelijking, maar in het kort zijn het vergelijkingen waarin objekten X, Y, Z en misschien nog wel meer staan, zodanig dat die objekten met elkaar vermenigvuldigd mogen worden, opgeteld, met getalletjes vermenigvuldigd worden en dit alles in willekeurige volgorde, maar bijvoorbeeld wat niet mag zijn combinaties als X^Y of $\sqrt{X}$ en objekten mogen niet door elkaar gedeeld worden (deze eis kan verwijderd worden, maar daar wil ik niet op ingaan).

In mijn werk speelt het een belangrijke rol om te bestuderen in welke verzameling getallen een algebraïsche vergelijking een oplossing heeft. Men kan laten zien dat voor elke vergelijking van het type waarin één objekt X gezocht wordt, er een oplossing bestaat als men de verzameling van getallen maar goed kiest (stelling van Kronecker). Voor de mensen die zich graag laten verwonderen, beschouw de volgende vergelijking:

$$X^2 + 1 = 0\,. \tag{3}$$

Probeer nu zelf eens wat oplossingen te benaderen aan de hand van welke methode dan ook. Bijvoorbeeld, gebruik gerust een rekenmaschine. Het flauwe is dat de getallenverzameling die men moet kiezen zodanig dat deze vergelijking een oplossing heeft, getallen bevat die niet reëel zijn! Dus per definitie kun je ze niet met de rekenmaschine vinden![1]

3 Meetkunde

De meeste mensen hebben wel eens een grafiek moeten tekenen op de middelbare school. Dat is eigenlijk ook stukje meetkunde van wat ik vaak doe. Beschouw de vergelijking:

$$X^2 - Y = 0\,. \tag{4}$$

Als we dit herschrijven als $Y = X^2$ dan kunnen we daar een grafiek van tekenen: in een (y, x)-coördinatenstelsen tekenen we dan een vloeiende lijn door de punten van de vorm (x, x^2) en de meesten zullen op de middelbare school dit ooit wel eens gehad hebben. Men verkrijgt zo een parabool. De vergelijking $X^2+Y^2-1 = 0$ definieert een cirkel.

Op deze wijze laten zich vele algebraïsche vergelijkingen beschrijven aan de hand van meetkundige figuren. Maar ook andersom; veel meetkunde laat zich beschrijven in termen van algebraïsche objekten. Het snijden van lijnen in een vlak laat zich op een mooie manier algebraïsch beschrijven bijvoorbeeld.

Laat ik nu eens een mooi begrip nemen en daar iets verderop ingaan. Voor de mensen die het volgende niet snappen, skip het gerust en ga verder lezen bij . de sectie 'Nuttig?'. Ik beschouw nu alleen curven in het twee-dimensionale vlak; lokaal lijken dat dus grafieken van funkties. Een bekend begrip van de middelbare school is de raaklijn. Een raaklijn aan een grafiek is een lijn die de grafiek ergens raakt; dus de lijn gaat niet dwars door de grafiek heen, maar raakt de curve ergens. In een kleine omgeving om het raakpunt heen lijkt de grafiek wel benaderbaar door de rechte lijn.

Met de techniek van het differentiëren is het niet moeilijk om uitdrukkingen te vinden voor Echter, soms mag men niet overal differentiëren; beschouw bijvoorbeeld de curve $X^2 - Y^3 = 0$ in de oosprong. Toch kun je een raaklijn tekenen; een heleboel zelfs, ze raken allemaal alleen de grafiek in de oorsprong. De raakruimte lijkt daar wel twee-dimensionaal.

Dit soort eigenschappen kan men ook op puur algebraïsche manier beschrijven. Waar het in het kort op neerkomt (en je moet er echt meer van weten om het te snappen) is het volgende: een kurve (of een eindige verzameling kurves) definieert een ideaal I in de ring van polynomen in twee variabelen $k[X, Y]$,

[1] Daarom dus, weg met de rekenmaschine uit het rekenonderwijs!

waar k een veld is. Elk punt P op de grafiek definieert een (maximaal) ideaal $m_P \subset A = k[X,Y]/I$. De raakruimte van de grafiek in het punt P is dan de duale vektorruimte van de vektorruimte m_P/m_P^2 over A/m_P. De dimensie van de raakruimte is dan gegeven als de dimensie van deze vektorruimte en dat is het minimale aantal generatoren dat nodig is om m_P te genereren. Voor de mensen die dit een beetje snappen maar niet helemaal; don't worry, ik zal ook een 'Algebraïsche Geometrie voor niet-leken schrijven'. Op deze manier is dus algebraïsch te onderzoeken hoe de grafiek er in de buurt van een punt uit ziet.

4 Nuttig?

Is het bestuderen van algebraïsche vergelijkingen nuttig? Zerker! Veel computers rekenen nog altijd de akties optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen en dat zijn precies de akties die de algebraïsche geometrie gebruikt als input. Veel lastige problemen hebben een deelprobleem dat puur algebraïsch is en de algebraïsche geometrie geeft dan het gereedschap om dat deelprobleem te bestuderen. Veel vergelijkingen in de economie of in de scheikunde, maar ook in de natuurkunde en sterrenkunde zijn algebraïsch, of hebben een deelprobleem dat algebraïsch is. De algebraïsche meetkunde is dan een steun in de rug voor deze vakgebieden.

Dan kun je je afvragen, maar wat heb IK eraan? Relatief simpel; als je belasting betaalt wil je dat dat zo goed mogelijk gebruikt wordt. Daar zijn grote ingewikkelde modellen voor nodig, en dus komt er wat algebraïsche meetkunde bij kijken. Een ander voorbeeld; veel apparaten hebben onderdelen die draaien, het begrip 'rotatie' kan man zien (en proberen te begrijpen) in het kader van zogenaamde algebraïsche groepen en daar speelt de algebraïsche geometrie een rol. En zo kan ik wel een tijdje doorgaan; algebraïsche geometrie is dan wel een zeer abstract onderwerp, het vindt zijn weerga in alledaagse dingen. Niet dat ik nu met die praktische problemen bezig ben Daar zijn weer andere mensen voor. Ik bouw aan de fundering achter die praktische toepassingen - puur theoretisch en abstract dus. Ik hoop dus ergens dat iemand die iets praktischer is ingesteld dan ik, later ooit op de een of andere manier een methode vindt om in de pratkijk te gebruiken waar ik onderzoek naar doe.

Daarboven op komt nog dat veel resultaten in het abstracte kader van de algebraïsche geometrie toepasbaar is in andere takken van de wiskunde, die op hun manier weer bijdragen aan de samenleving. Al met al durf ik dus redelijk te beweren dat algebraïsche meetkunde nuttig is. En vanuit mijn oogpunt gezien is het zeker nuttig; het is een leuk tijdverdrijf voor mij en ik krijg er ook voor betaald en hoef dus geen uitkering te zoeken, of op straat te hangen en fatsoenlijke mensen om geld te bedelen - of het ze met geweld afhandig te maken!

Vragen? Kommentaar?

Mocht je naar aanleiding van deze tekst vragen of opmerkingen of zelfs onegzouten kritiek hebben, dan kun je natuurlijk een mailtje sturen naar: `dbwestra@gmail.com`, of `dennis.bouke.westra@univie.ac.at`.