Catalan-Zahlen (kurze Version)

DBW

22. Dezember 2016

Wir definieren die Catalan-Zahlen C_n zuerst durch folgende rekursive Formel

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \tag{1}$$

wobei der Anfangswert durch $C_0 = 1$ festgelegt wird. Somit finden wir $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$, $C_5 = 42$, $C_6 = 132$ und $C_7 = 429$.

Klammerpaare. Wie viele Arten können wir mit n Klammernpaare () eine erlaubte Kette von Klammern bilden? Damit eine Kette erlaubt ist, darf die Kette, von links nach rechts gelesen, an keiner Stelle mehr)-Klammern als (-Klammern haben. Umgekehrt, falls diese Bedingung erfüllt ist, ist die Kette auch legal; tatsächlich muss die erste)-Klammer in der Kette mit der (-Klammer davor kombinieren, und somit können wir dieses Paar entfernen. Die Bedingung ist dann noch immer erfüllt, und wir können daher die Klammernpaare Stück vor Stück entfernen, bis nichts mehr übrig bleibt.

Die Anzahl der legalen Klammernwörter zählen ist somit äquivalent mit dem Folgenden: Unter allen Ketten mit $+1$ und -1 gibt es wie viele mit nichtnegativen Zwischensummen, von links nach rechts rechnend?

Gebirgsketten. Die letzte Interpretation kann auch als Wanderung längst einer vertikalen Achse betrachtet werden; mit jedem Schritt gehen wir einen Schritt nach oben oder nach unten. Die Frage ist dann, auf wie viele Weisen man $2n$ Schritte machen, sodass man auf derselben Höhe endet, ohne dabei unter dem Anfangsniveau zu kommen?

Die vertikalen Schritte können zu einer Gebirgskette gemacht werden; zusätzlich zur senkrechten Bewegung macht man bei jedem Schritt einen Schritt nach rechts, sodass man über ein zweidimensionales Gitter wandert. So ein Pfad korrespondiert mit einer Folge von Schritten von der Form / und \, wobei man dann niemals unter die waagrechte Linie des Anfangsniveaus kommt.

Stimmen Zählen bei Ex Äquo. Stellen wir uns vor, zwei Kandidaten einer Stichwahl bekommen gleiche Anzahl von Stimmen. Auf wie viele Arten können die Stimmzettel ausgezählt werden, sodass der eine Kandidat niemals in Führung geht? Dieses Problem ist klar äquivalent mit dem vorigen.

Die Reihenfolge in einem Produkt wählen. Betrachten wir die Multiplikation von $n+1$ Zahlen. Auf wie viele Weisen kann man ohne Änderung der Reihenfolge der Symbole, die

Multikplikation durchführen? Weil wir die Reihenfolge nicht ändern wollen, kann auch die Multiplikation von $n+1$ Matrizen betrachtet werden.

Mit Klammern kann man die Art der Multiplikation andeuten. So bedeuten $((AB)(CD)$, dass zuerst AB und CD berechnet werden, und die Ergebnisse dann mit einander multipliziert werden. Zu jeder Zeit in der Multiplikation wird die Anzahl der Faktoren der Multiplikation um eins weniger. Es dauert also n Schritte, bis wir nur noch ein Objekt haben, das Ergebnis. Somit brauchen wir n legal angeordnete Klammernpaare. Wenn wir eine erlaubte Kette von n Klammernpaaren haben, können wir diese mit Symbolen ausfüllen, und dann haben wir eine Multiplikation; jede Kombination () bedeutet eine Multiplikation XY von Objekten X und Y, was zu einem neuen Objekt Z führt. Dieses Paar () kann dann gestrichen werden, wobei man sich die Objekte XY merkt. Nach mehreren Schritten hat man eine leere Kette, und wenn man sich dann zurückarbeitet, bekommt man eine Multiplikation.

Die rekursive Formel

Betrachten wir die Anzahl der Möglichkeiten mit $2n$ vertikalen Schritten so hinauf und hinunter zu gehen, sodass wir auf derselben Höhe enden und niemals unter dem Startpunkt sind. Wir schreiben C_n für diese Anzahl und nehmen zuerst an, wir wissen C_0, C_1, C_2 bis C_n und wollen damit C_{n+1} ausrechnen. Sei $2l$ das erste Mal, dass unser Pfad nach dem Start wieder bei Höhe 0 ist. Dann muss l mindestens 1 sein. Die ersten $2l$ sind dann so, dass man zuerst nach oben geht, und dann $2l-2$ Schritte macht, die niemals unter Höhe 1 kommen, und dann zu Höhe 0 geht. Es gibt C_{l-1} solche Wege. Bildlich ausgedrückt, der erste und der letzte Schritt dieser $2l$ Schritte können weggenommen werden, und es entsteht ein legaler, aber kürzerer Weg. Für die restierenden $2(n+1-l)$ Schritte gibt es C_{n+1-l} Möglichkeiten. Somit gibt es $C_{l-1} \cdot C_{n+1-l}$ solche Wege, die nach $2l$ Schritten das erste Mal nach Start wieder auf Höhe 0 sind. Falls $l = n+1$, können wir gar den ersten und letzten Schritt der Folge wegnehmen und so bekommen wir wieder eine legale Folge von Schritten. Also nimmt l die Werte $1, 2, \ldots, n+1$ an. Somit gibt es $C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \ldots + C_n C_0$ Weisen, einen legalen Weg mit $2n+2$ Schritten zu machen. Dies ergibt die rekursive Formel.

Es gibt noch einen anderen Weg, die rekursive Formel zu begründen. Nehmen wir an, wir haben eine legale Kette X mit $n+1$ Klammerpaaren. Die erste Klammer is (und sie paart sich mit einer). Unsere Kette X ist also von der Form $(A)B$, wobei A und B erlaubte Ketten sind, mit insgesamt n Klammerpaaren. Falls A l Klammerpaare hat, so hat B also $n-1$ Paare. Es gibt also $C_l C_{n-1}$ legale Ketten mit $n+1$ Klammerpaaren, sodass die erste Klammer zur Klammer an der $2l+2$-ten Stelle gehört. Klarerweise korrespondiert $l = 0$ mit einer leeren Kette A, und $l = n$ mit einer leeren Kette B. Somit ergibt sich dieselbe rekursive Formel.

Eine explizite Formel

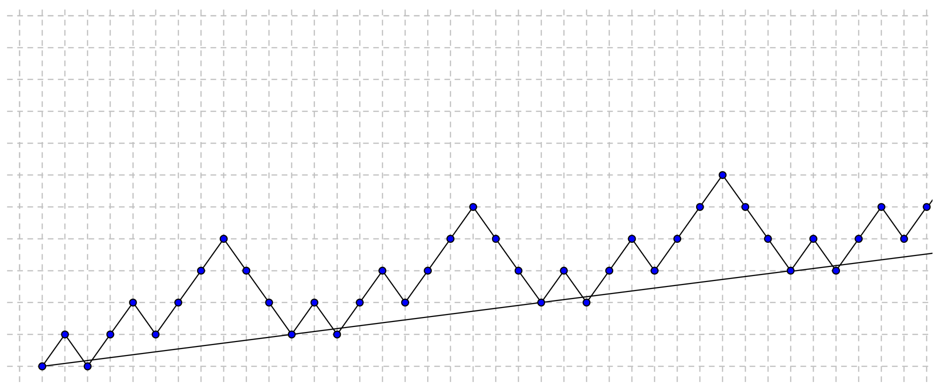
Jetzt wollen wir die explizite Formel $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Natürlich könnte man diese Formel mit vollständiger Induktion begründen, wir wollen aber ein kombinatorisches Argument geben.

Wir betrachten die Gebirgsketten, also die Pfade von der Form $//\backslash/\backslash\backslash$. Nun nehmen wir zuerst eine Folge, die nicht balanziert ist, sondern eine, die insgesamt um einen Schritt nach oben geht; wir betrachten also jetzt zuerst Pfade mit $n+1$ / und n \. Es gibt insgesamt $\binom{2n+1}{n}$ solche Pfade. Betrachten wir irgendeinen Pfad von der Form. Wir bezeichnen x_0, x_1, $\ldots$, x_{2n+1} die Punkte im zweidimensionalen Gitter, die wir so erreichen.

Wir setzen unseren Pfad periodisch fort, und zählen die Punkte weiter, $x_{2n+2}, x_{2n+3}, \ldots$. Die Punktemenge, oder die entstandene Kurve, hat Periode $2n+1$. Die Gerade L_0, welche x_0 mit x_{2n+1}, x_{4n+2} und so weiter, hat Steigung $\frac{1}{2n+1}$, und berührt somit nur die Punkte x_k, für welche k ein Vielfaches von $2n+1$ ist. Andere Punkte x_i liegen nicht auf der Geraden L_0.

Wir nennen C die Kurve, die unsere Gitterpunkte in der natürlichen Reihenfolge verbindet. Somit enthält C genau die Strecken $x_i x_{i+1}$. Falls C nur L_0 in den Punkten $x_{k(2n+1)}$ mit $k = 0, 1, 2, \ldots$ berührt (schneidet), bekommen wir eine erlaubte Gebirgskette, indem wir den ersten / wegnehmen. Tatsächlich ist die Strecke durch x_1 und x_{2n+1} waagrecht und schneidet (berührt) C nicht.

Hier unten ist eine periodische Kette mit 12 Punkten, verbunden durch 6 / und 5 \. Die Kurve C schneidet L_0 und somit ist der Teil vom C zwischen x_1 und x_{12} keine erlaubte Gebirgskette.



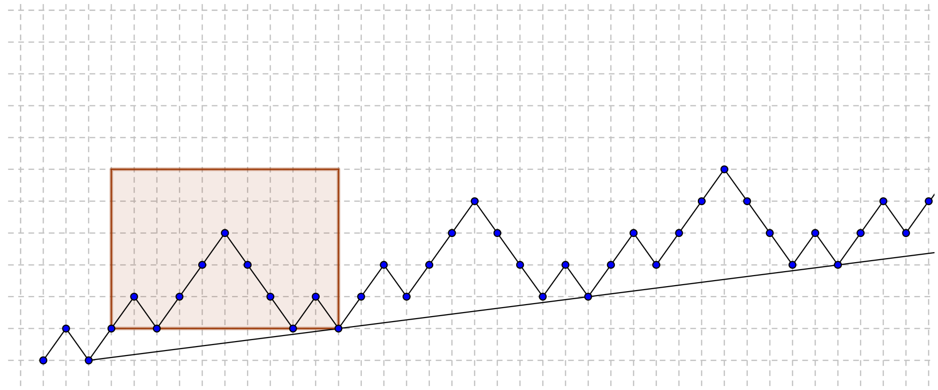
Jetzt wollen wir die folgende Behauptung beweisen: Für jede Kette von $n+1$ / und n \existiert genau eine zyklische Permutation der Symbole, die in eine erlaubte Gebirgskette resultiert, wenn wir den ersten Schritt wegnehmen.

Indem wir die / und \permutieren, tun wir eigentlich nichts anderes als einen neuen Startpunkt wählen.

Wir betrachten die Geraden L_i, die x_i mit den Punkten $x_{i+k(2n+1)}$ verbindet für $k = 0, 1, 2, \ldots$ und $0 \leq i \leq 2n$. All diese gGeraden haben dieselbe Steigung und sind somit parallel. Aber es gibt eine Gerade L_a, die unter allen anderen liegt; die Geraden schneiden eine senkrechte Gerade in einer bestimmten Reihenfolge, und die Gerade, die diese Senkrechte an der untersten Stelle schneidet, liegt unter den anderen Geraden. Aber dann ist die Kette von C, die bei x_{a+1} anfängt und bei x_{a+2n+1} endet, eine erlaubte Gebirgskette.

Also, beginnend mit einer Kette von $n+1$ / und n \, finden wir genau eine, aus der wir durch Wegnehmen des ersten Schrittes eine erlaubte Gebirgskette machen können.

Hier unten ist dieselbe Abfolge von Punkten wie oben, nur fängt sie bei x_2 an. Die erlaubte Gebirgskette ist dann im schattierten Rechteck wiedergegeben.



Wir können die Ketten von $n{+}1$ / und n \in Gruppen einteilen, und zwar so, dass zwei Ketten genau dann in derselben Gruppe sind, falls sie eine zyklische Permutation von einander sind. Jede Gruppe enthält $2n+1$ Elemente. In jeder Gruppe ist genau eine erlaubte Gebirgskette. Die erlaubte Anzahl von Gebirgsketten ist somit

$$\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{2n+1}\frac{(2n+1)\cdot(2n)!}{(n+1)\cdot n!\cdot n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \qquad (2)$$