Schwierige Gleichungen und Pistolenduelle

Wir haben jetzt schon einige Gleichungen gesehen in den Stunden in Dezember. Diese Gleichungen waren meistens Gleichungen in einer Variable und sehr oft linear. Wir können also Gleichungen vom Typ $2x - 5 = 0$ lösen. Da die 2 und 5 nicht ganz allgemein sind, würde ich 'Konstanten' a, b und c einführen und sagen, dass wir Gleichungen vom Typ

$$ax + b = c\,, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$$

nach x lösen können. Dies ist, so wie wir oft gesehen haben, nicht so schwierig. Schwieriger wird es wenn wir aus einem Kontext zuerst mal eine Gleichung destillieren müssen. Erst wenn uns das gelungen ist, und wenn die Gleichung linear ist, oder linear gemacht worden ist, können wir diese Gleichung lösen. (Denke an die Aufgabe vom Arbeitsblatt mit den Äpfeln.) Auf eine ganz andere Weise kann man sich das Leben auch schwerer machen. Man könnte nicht-lineare Gleichungen betrachten. Wie löst man zum Beispiel die Gleichung

$$x^2 - 3x + 2 = 0\,.$$

Man könnte einfach vieles durchprobieren, und hoffen, dass eine Antwort dazwischen ist. Wenn man sieht, dass $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$, dann weiß man einfach, dass es nur zwei Lösungen gibt: $x = 1$ und $x = 2$. Aber warte mal! Bei den linearen Gleichungen hatten wir nur eine Lösung, und jetzt auf einmal zwei? Das stimmt!
Aber haben quadratische Gleichungen - also die Gleichungen, wobei die höchste Potenz von der Variable x das Quadrat von x ist - immer zwei Lösungen? Nein! Gegenbeispiel Numero Uno:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

hat nur eine Lösung, weil $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ und Letzteres ist nur Null, wenn $x - 1 = 0$. Diese Gleichung hat also nur eine Lösung! Gegenbeispiel Numero Due ist noch viel schockierender:

$$x^2 + 1 = 0$$

hat keine Lösungen! Es gibt keine reellen Zahlen, derer Quadrat kleiner Null ist! Man kann beweisen, dass eine quadratische Gleichung nie mehr als zwei Lösungen haben kann. Später werdet ihr sehen, wie wir im Allgemeinen quadratische Gleichungen lösen werden.
Jetzt, dass wir quadratische Gleichungen gesehen haben, dann könnte man noch fragen, ob es weiter geht: was mit Gleichungen mit dritten Potenzen von x? Zum Beispiel, wie lösen wir die Gleichung $x^3 - x = 0$? Auch hier ist es nicht so schwierig wenn wir sehen, dass $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$. Die Lösungen sind also $x = 0$, $x = 1$, und $x = -1$. Hier finden wir also drei Lösungen. Die Gleichung $x^3 + x = 0$ hat nur eine Lösung: $x = 0$ ist eine Lösung und wenn $x \neq 0$, dann können wir durch x teilen und finden $x^2 + 1 = 0$, was aber keine Lösungen hat.
Wie löst man aber solche Gleichungen mit dritten Potenzen? Das lernt man leider nicht mehr in der Schule. Am Ende vom Mittelalter bemühte sich der Italiener Cardano (obwohl Italien als Land noch nicht existierte) mit diesen Gleichungen. Er hatte viele Kollegen, die auch nach Lösungen suchten, aber Cardano war der Erste mit einem guten Trick, womit er immer eine Lösung finden konnte. Seine Methode ist noch immer bekannt bei den Mathematikern von heute und ist auch nicht trivial!
Nach dem Erfolg von Cardano war es natürlich der Fall, dass man Gleichungen mit vierten Potenzen zu lösen versuchte. Das war schon recht schwierig, aber einige Erfolge waren da. Es war aber ein Franzose, der das fast Unmögliche leistete: Der noch sehr junge Evariste Galois zeigte, dass es keine Methode gibt, um mit algebraischen Manipulationen die Lösungen von Gleichungen mit fünften Potenzen oder mit höheren Potenzen zu lösen. Das heißt: es kann

nicht noch einen Cardano geben, der eine Methode vorgibt, wie man mit Herumspielen mit einer allgemeinen Gleichung mit fünften Potenzen die Lösungen findet. Also, das heißt, dass es keine algebraische Methode gibt, um eine Gleichung vom Typ

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

für allgemeine Werte von a, b, c, d, e zu lösen. Wenn man spezifische Konstanten a, b, c, d, e vorgibt, hat man vielleicht Glück, und gibt es eine schöne Identität. Zum Beispiel

$$x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = 0$$

lösen wir ganz leicht, so bald wir sehen, dass die linke Seite obiger Gleichung $(x-1)^5$ ist. Aber für allgemeine Werte der Konstanten gibt es keine Methode. Für quadratische und kubische (mit dritten Potenzen) Gleichungen gibt es eine Methode, für quartische (mit vierten Potenzen) Gleichungen gibt es eine mühsame Methode, aber weiter gibt es keine Methoden mehr!

Wie ist Galois darauf gekommen? Wie kriegt man überhaupt die Idee, zu beweisen, dass man etwas nicht lösen kann? Diese Fragen lassen sich schwierig beantworten. Es ist ohne Zweifel, dass Galois genial war. Leider war er auch oft krank, sehr dünn und ein leidenschaftlicher Republikaner - in der Zeit der französchen Revolution war das nicht eine gute Eigenschaft. Er wurde drei Mal wegen republikanischer Revolutionen verhaftet!

Zuerst wollte die französische mathematische Elite die Arbeit von Galois nicht anerkennen; sie hatten es einfach nicht verstanden, und zusätzlich hatte Galois keine Freunde auf der Universität. Aus dem Grund war er sehr frustriert und er wollte seine Arbeiten selbst drucken und verbreiten. Leider war er sehr arm ... Aber seine Arbeiten waren genial; er hatte ein ganz neues Gebiet erfunden; die Gruppentheorie hat Galois selbst gegründet. Im Moment spielt genau diese Gruppentheorie eine außerordentlich wichtige Rolle in der Physik, Mathematik, Chemie, Quantenmechanik, Technik, Robotik und so weiter.

Als Galois zwanzig war, war er auch leidenschaftlich verliebt. Aber wo er in der Mathemtik der Einzige war, der seine Arbeit verstand, so war er hier nicht alleine; es hatte sich noch einer in dieses Mädl verliebt. So leidenschaftlich wie Evariste Galois war, forderte er seinen Nebenbuhler, in einem Pistolenduell zu entscheiden, wer von den Beiden das Recht auf dieses Mädl hatte. Dieser Duell war für Galois nicht so gut; da er physisch nicht so stark war - er war durch seine Krankheiten eine geschwächte Person - verlor er großartig. Mit offener Bauchwunde fand man ihn und man brachte ihn ins Spital. Am nächsten Tag starb er in den Armen seines Bruders, der ihn gerade davor gefunden hatte, nachdem er einen ganzen Nacht Evariste gesucht hatte.

Ob diese Geschichte mit dem Duell ganz wahr ist, wissen wir nicht so genau. Leider ist die Geschichte nicht gut dokumentiert. In der Nacht vor seinem Tod schrieb er zwei Briefe; einen an Gauß und einen an Jacobi. In diesen Briefen beschrieb er seine Arbeiten und hoffte, dass er dann auf diese Weise anerkannt werden würde. Es ist wegen dieser Briefe, dass wir die Ideen von Galois kennen.

Ich hoffe, dass ihr jetzt sieht, dass es in der Geschichte der Mathematik komische aber interessante Geschichten gibt, und dass Mathematik eine Wissenschaft ist, wo es ab und zu eine Überraschung gibt, wofür man eine komische aber leidenschaftliche Persönlichkeit braucht, wie die von Galois. Viel Spaß in den Ferien, rastet gut aus, und kommt gut erholt in Jänner wieder zurück in die Schule! Vielleicht macht ihr noch etwas Mathematik, vielleicht gründet ihr ein neues Gebiet in der Mathematik, wer weiß,... mit etwas Leidenschaft ist viel möglich.

frohe Weihnachten

euer Mathematiklehrer