Hartog und Riemann

Eine Polydisk um einen Punkt $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ ist eine Menge der Gestalt

$$\{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid |\zeta_1 - z_1| \le r_1 , \dots , |\zeta_n - z_n| \le r_n \} \,, \tag{1}$$

für bestimmte positive reelle Zahlen $r_1, \dots, r_n$.
Wir werden ständig den Satz von Cauchy verwenden: Sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}^n$ und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf U; für alle $z \in U$ gibt es eine Polydisk D in U, sodass z ein innerer Punkt von D ist und dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)} \mathrm{d}\zeta_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\zeta_n \,. \tag{2}$$

Satz von Riemann. *Sei $D = \{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid |\zeta_i| \le 1\}$ eine Polydisk und sei $D^* = D - \{\zeta \in D \mid \zeta_1 = 0\}$. Wenn $f : D^* \to \mathbb{C}$ eine beschränkte analytische Funktion auf D^* ist, dann kann man f auf D analytisch fortsetzen.*

Beweis: Wir werden eine analytische Funktion auf D definieren durch

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)} \mathrm{d}\zeta_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\zeta_n \,. \tag{3}$$

Die Funktion $\tilde{f}$ ist automatisch analytisch, es muss also nur noch gezeigt werden, dass sie auf D^* mit f übereinstimmt. Sei dazu $z = (z_1, \dots, z_n)$ ein Punkt in D^*. Für ein genügend kleines $\epsilon > 0$ definieren wir:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid |\zeta_1 - z_1| = \epsilon,\, |\zeta_i| = 1,\, i > 1\} \,, \\ \Gamma_2 &= \{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid |\zeta_1| = \epsilon,\, |\zeta_i| = 1,\, i > 1\} \,. \end{aligned} \tag{4}$$

Wir werden ϵ so klein nehmen, dass $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ und dass Γ_1 und Γ_2 vollständig in D^* liegen. Wenn g eine analytische Funktion auf $U \subset \mathbb{C}$ ist, ist $g(\zeta)\mathrm{d}\zeta_1 \wedge \dots \wedge \zeta_n$ eine geschlossene Differentialform auf U. Da $\partial D - \Gamma_1 - \Gamma_2$ mit der richtigen Orientierung einen Rand eines Gebiets in D^* darstellt, worauf $\frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)}$ analytisch ist, gilt

$$\begin{aligned} &\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)} \mathrm{d}\zeta_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\zeta_n - \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)} \mathrm{d}\zeta_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\zeta_n \\ &= \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)} \mathrm{d}\zeta_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\zeta_n = f(z) \,. \end{aligned} \tag{5}$$

Da f beschränkt auf D ist, dürfen wir annehmen, dass es eine positive reelle Zahl $M > 0$ gibt, mit $|f(\zeta)| < M$ für alle $\zeta \in D^*$. Wenn wir Γ_2 durch $\zeta_1 = \epsilon e^{i\varphi_1}$ und $\zeta_l = e^{i\varphi_l}$ für $l > 1$ parametrisieren, dann können wir den Beitrag des Γ_2-Integrals in (5) abschätzen durch

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_1 \dots \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_n \frac{\epsilon M}{|\epsilon e^{i\varphi_1} - z_1| \cdot |e^{i\varphi_2} - z_2| \cdots |e^{i\varphi_n} - z_n|} \,. \tag{6}$$

Da aber ϵ beliebig klein gemacht werden kann, ist $f(z)$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)} \mathrm{d}\zeta_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\zeta_n \,. \qquad \square \tag{7}$$

Satz von Hartog. *Sei* $D = \{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid |\zeta_i| \leq 1\}$ *eine Polydisk und sei* $D^* = D - \{\zeta \in D \mid \zeta_1 = \zeta_2 = 0\}$. *Wenn* $f : D^* \to \mathbb{C}$ *eine analytische Funktion auf* D^* *ist, dann kann man* f *auf* D *analytisch fortsetzen.*

Beweis: Wir werden wieder eine Funktion $\tilde{f}$ definieren durch

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} \mathrm{d}\zeta_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\zeta_n \,, \tag{8}$$

für z in D. Wir können den Satz beweisen, indem wir zeigen, dass f und $\tilde{f}$ auf D^* übereinstimmen. Sei $z = (z_1, \ldots, z_n)$ in D^* und seien ϵ_1 und ϵ_2 genügend kleine positive reelle Zahlen, sodass

$$D_\epsilon \, \{\zeta \mid |\zeta_i - z_i| \leq \epsilon_i, \, i = 1, 2; \, |\zeta_j - z_j| \leq 1, \, j > 2\} \tag{9}$$

in D^* liegt; wir dürfen annehmen, dass $|\epsilon_i| < |z_i|$ und $\epsilon_i + |z_i| < 1$ für $i = 1, 2$. Dann ist z ein innerer Punkt von D_ϵ und somit gilt, dass $f(z)$ gegeben ist durch

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} \mathrm{d}\zeta_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\zeta_n \,. \tag{10}$$

Der Beweis ist dann fertig, wenn wir beweisen können, dass $\partial D - \partial D_\epsilon$ ein Rand in $\widetilde{D} = D^* - \bigcup_{i=1}^n \{\zeta \in D^* | \, \zeta_i = z_i\}$ ist. Wir werden eine Homotopie zwischen ∂D und ∂D_ϵ in $\widetilde{D}$ konstruieren. Genauer gesagt, wir werden zwei stetige differenzierbare positive Funktionen $\alpha_i : [0, 1] \to \mathrm{I\!R}^{>0}$ konstruieren, mit $\alpha_i(0) = 1$ und $\alpha_i(1) = \epsilon_i$, sodass die Menge

$$\partial D_t = \{\zeta \in C^n \mid |\zeta_i - t z_i| = \alpha_i(t), \, i = 1, 2, t \in [0, 1] \,; \, |\zeta_k| = 1, \, k > 2\} \,, \tag{11}$$

vollständig in $\widetilde{D}$ liegt. Dann folgt der Satz, da $\partial \bigcup_{t \in [0,1]} \partial D_t = \partial D - \partial D_\epsilon$. Da ζ_k für $k > 2$ fix sind, können wir uns auf Folgendes konzentrieren: Wir suchen zwei positive Funktionen $\alpha_i : [0, 1] \to \mathrm{I\!R}^{>0}$, sodass für die Punkte (ζ_1, ζ_2) definiert durch $|\zeta_i - t z_i| = \alpha_i(t)$ folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(a) Niemals sind ζ_1 und ζ_2 gleichzeitig Null.

(b) Niemals $\zeta_1 = z_1$ oder $\zeta_2 = z_2$.

(c) Ständig $|\zeta_1| \leq 1$ und $|\zeta_2| \leq 1$.

Die dritte Bedingung ist leicht zu erfüllen, wenn wir bedenken, dass

$$|\zeta_i| \leq |\zeta_i - t z_i| + t|z_i| = \alpha_i(t) + t z_i \,. \tag{12}$$

Wir werden also fordern, dass $\alpha_i(t) \leq 1 - t|z_i|$. Wegen der zweiten Bedingung brauchen wir uns auch keine Sorgen zu machen, weil $\zeta_i = z_i$ nur dann, wenn $\alpha_i(t) = (1 - t)|z_i|$. Bedingungen zwei und drei sind also erfüllt, wenn wir wählen

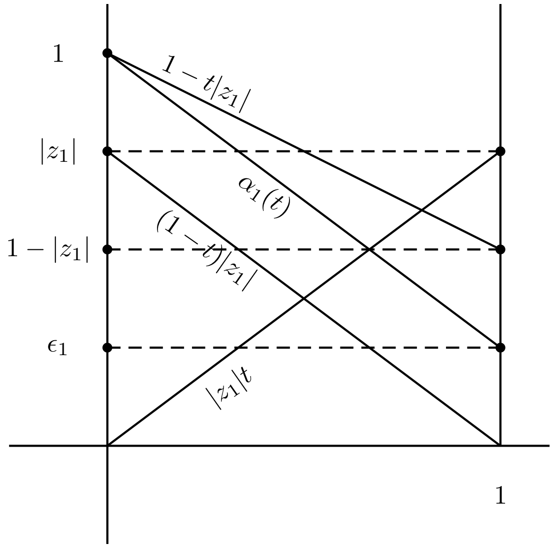
$$(1 - t)|z_i| < \alpha_i(t) \leq 1 - t|z_i| \,. \tag{13}$$

Die Funktionen $\alpha_i(t) = 1 - (1 - \epsilon_i)t$ erfüllen Bedingung (13).
Dann jetzt die erste Bedingung, dass ζ_1 und ζ_2 nicht gleichzeitig Null sind; $\zeta_i = 0$, nur dann, wenn $\alpha_i(t) = t|z_i$. Für die Wahl $\alpha_i(t) = 1 - (1 - \epsilon_i)t$ heißt dies, dass nur wenn t durch

$$t_i = \frac{1}{1 + |z_i| - \epsilon_i} \,, \tag{14}$$

gegeben ist, ζ_i Null sein kann. Die erste Bedingung ist dann äquivalent zu $t_1 \neq t_2$. Aber $t_1 = t_2$, nur wenn $|z_1| - \epsilon_1 = |z_2| - \epsilon_2$. Daher können wir, falls $t_1 = t_2$ den Parameter ϵ_2 (oder ϵ_1) etwas kleiner machen, und dann sind alle drei Bedingungen erfüllt. □

Für eine Skizze der Lage für α_1 unter der Annahmen, dass $|z_1| > 1 - |z_1|$, siehe hier unten:



(15)

Man sieht gleich, dass die Beginn- und Endpunkte der Kurve $(t, \alpha_1(t))$ bedingen, dass diese Kurve die Gerade $(t, |z_1|t)$ schneidet; dies ist auch der Fall wenn $|z_1| \leq 1 - |z_1|$.