Schulmathe: Polynom vierten Grades

Die Aufgabe besteht darin, dass wir folgenden Ratio bestimmen: gegeben ist ein Polynom vierten Grades, mit zwei Wendepunkten p_1 und p_2, wo p_1 . Die Gerade durch diese Wendepunkte schneidet die Kurve des Polynoms in noch zwei Punkten q_1 und q_2. Zu bestimmen ist der Ratio $||q_1 - p_1||/||p_1 - p_2||$ und $||q_2 - p_1||/||p_2 - p_1||$.

Wir machen bei dieser Aufgabe 2 Annahmen: (1) Es gibt zwei verschiedene Wendepunkte und (2) die Gerade durch diese zwei Wendepunkte schneidet der Graphik in noch zwei anderen Punkten.

Um die Distanzen zu bestimmen, können wir die Graphik beliebig in x- und y-Richtung translieren. Auch ändert sich der Ratio nicht under Skallierungen von x. Aus letzterem folgt, dass wir annehmen dürfen, dass das Polynom monisch ist:

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d\,.$$

Nach der Transformation $x \mapsto x - a/4$ können annehmen, dass $a = 0$. Nach einer Verschiebung $y \mapsto y + d$ können wir schon annehmen, dass $d = 0$. Wir dürfen also annehmen, dass unser Polynom gegeben ist durch:

$$f(x) = x^4 - 6ax^2 + bx\,. \tag{1}$$

Die Existenz von den zwei verschiedenen Wendepunkten impliziert, dass die Gleichung

$$x^2 - a = 0$$

zwei Lösungen hat. Daher muss a ein Quadrat sein, und wir können also statt (1) auch gleich

$$f(x) = x^4 - 6a^2x^2 + bx$$

für das definierende Polynom nehmen. Des Weiteren können wir annehmen, dass $a > 0$. Damit sind also die x-Koordinate der Wendepunkte p_1 und p_2 gegeben durch $x = \pm a$.

Sei $h = kx + l$ die Gleichung der Gerade durch p_1 und p_2. Die Schnittpunkte von dieser Gerade mit dem Graphen von f finden wir durch Lösen von $f(x) - h(x) = 0$. Beachte, dass f und $f - h$ nur im linearen Teil unterschiedlich sind. Wir wissen das $x = \pm a$ Nullpunkte des Polynoms $f - h$ sind, weil die Punkte p_1 und p_2 auf der Gerade durch p_1 und p_2 sind[1]. Wir können also schreiben

$$f(x) - h(x) = (x^2 - a^2)(x^2 + sx + t)\,,$$

für irgendwelche s und t. Da der Koeffizient vor x^3 in $f(x) - h(x)$ Null sein muss, sehen wir, dass $s = 0$. Dann muss aber, die zweite Annahme in Betracht nehmend, t ein Quadrat sein; also schreiben wir

$$f(x) - h(x) = (x^2 - a^2)(x^2 - c^2)\,,$$

wo c eine reelle Zahl ist, von welcher wir annehmen können, dass sie größer als Null ist. Da f und $f - h$ nur im linearen Teil anders ausschauen, sind die quadratischen Terme von f und $f - h$ gleich. Es folgt dann, dass

$$6a^2 = a^2 + c^2\,,$$

womit dann $c = \sqrt{5}a$. Damit sind alle Ratios fix, weil alle Punkte auf einer Gerade liegen, und deswegen statt der eigentlichen Distanzen die Projektion auf der x-Achse nehmen dürfen.

[1] Hatten Wittgenstein, Schlick, Hahn und Company dann doch recht, Mathe sei nur Tautologie, dafür aber sinnvolle?