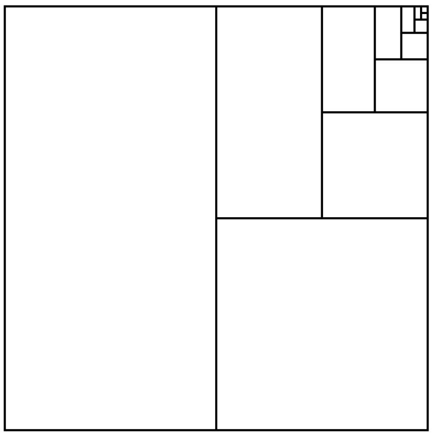
Unendliche Summen und Paradoxen

Eine mathematische Geschichte vor den Weihnachtsferien

So kurz vor Weihnachten und zum Abschluss des Themas 'Folgen', möchte ich euch eine kurze Geschichte über Folgen mitgeben. Dieser Text soll ein wenig eine Anregung zum Nachdenken über mathematische und philosophische Themen sein. Was ist gemeint mit einer unendlichen Folge? Was ist unendlich überhaupt; wie endlich ist unendlich eigentlich? Damit wünsche ich euch eine schöne Urlaubszeit, frohe Weihnachten und viel Spaß beim Lesen und beim (gegebenenfalls) Nachdenken.

Betrachte ein Quadrat mit Fläche 1. Wir können die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seiten verbinden und somit das Quadrat in zwei Vierecke teilen, beide mit Fläche $\frac{1}{2}$. Eines dieser Vierecke können wir wieder in zwei gleichgroße Quadrate aufteilen; beide Quadrate haben dann Fläche $\frac{1}{4}$. Die Summe der Flächen ist also gegeben durch $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Jetzt wählen wir eines der beiden Quadrate aus, und wiederholen damit das Verfahren, und noch einmal, und noch einmal, ... und so weiter; nach 6 Mal wiederholen kann es so aussehen wie in der Figur hier unten:



Die Gesamtfläche ändert sich nicht, auch nicht nachdem wir das Verfahren drei Mal wiederholen; also finden wir die Gleichheit:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64}\,, \tag{1}$$

die ich aus Gründen, die hoffentlich später klarer werden, lieber so schreibe:

$$1 - \frac{1}{64} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\,. \tag{2}$$

Wenn wir das Verfahren des Trennens des Quadrats sechs Mal wiederholt haben, finden wir auf dieselbe Weise die Gleichheit:

$$1 - \frac{1}{4096} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2048} + \frac{1}{4096}\,. \tag{3}$$

Ich schreibe es noch mal anders:

$$1 - \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{12}}\,. \tag{4}$$

Aber warte! So etwas lässt sich verallgemeinern: wir können jetzt ziemlich sicher sein, dass für alle natürlichen Zahlen k die folgende Gleichheit gelten wird:

$$1 - \tfrac{1}{2^k} = \tfrac{1}{2^1} + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} + \ldots + \tfrac{1}{2^{k-1}} + \tfrac{1}{2^k}\,. \tag{5}$$

Ein besseres Beobachten unseres Verfahrens der Auftrennungen im Quadrat liefert eine gute Veranschaulichung warum Formel (5) richtig ist - und das überlasse ich dir. Es gibt auch einen algebraischen Beweis, und diesen Beweis werden wir wahrscheinlich irgendwann noch sehen, und sonst musst du mich einfach fragen[1].

Worauf ich eigentlich ziele, ist folgende Überlegung: Was passiert wenn ich k immer und immer größer nehme? Bemerke zuerst, dass wenn k immer größer wird in dem Ausdruck $1 - \frac{1}{2^k}$, sich dieser Ausdruck immer mehr der Zahl 1 annähert. Zum Beispiel ist die Zahl $1 - \frac{1}{2^{100}}$ sehr schwierig von 1 zu unterscheiden; die Dezimalentwicklung schaut aus wie $0,99999\cdots$, wo mehr als die ersten 29 Zahlen hinter dem Komma Neuner sind. Also, wenn k in Formel (5) gegen unendlich geht, dann geht die linke Seite von Formel (5) gegen 1.

Aber was ist mit der rechten Seite? Die Seite wird eine unendliche Summe ohne Ende:

$$\tfrac{1}{2^1} + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{2^4} + \ldots\,. \tag{6}$$

Wir können diese Summe als Grenzwert einer Folge sehen. Wir nehmen $x_1 = \frac{1}{2}$ und die $(n+1)$te Zahl in der Folge ist die Hälfte von der $n$ten Zahl: $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}x_n$. Für dich ist dann die kleine Aufgabe, zu verifizieren, dass diese Folge für $n = k$ genau die rechte Seite der Formel (5) liefert!

Die so eben definierte Folge ist eine streng monoton steigende Folge; es kommt immer etwas positives dazu, also werden die x_n immer größer mit n. Das heißt, dass für alle natürlichen Zahlen n und l gilt, dass

$$x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < x_{n+3} < \ldots < x_{n+l}\,. \tag{7}$$

Insbesondere, wenn m und m' zwei natürliche Zahlen sind, mit $m' < m$, dann gilt die strikte Ungleichheit $x_{m'} < x_m$. Für die, die lieber Zahlen als Buchstaben sehen; nehme in der Kette (7) zuerst $l = 3$, dann $l = 4$, dann $l = 5$, und so noch ein Paar. Aber dann siehst du, dass wenn eine Zahl m' kleiner ist als m, dann muss m von der Form sein $m = m' + l$: wenn m genau 1 größer ist als m, dann nimmst du $l = 1$, wenn m genau 2 größer ist als m, dann nimmst du $l = 2$, wenn m genau 3 größer ist als m, dann nimmst du $l = 3$. Und so weiter. Du wirst schon verstehen, warum ich lieber Buchstaben benutze!

Durch die Formel (5) wissen wir auch schon, dass alle x_n kleiner als 1 sind. Aber wenn n immer größer wird, dann kommt x_n immer mehr in die Nähe von 1. Also jetzt der Punkt: wir haben eine streng monoton steigende Folge, aber vorbei 1 kommt sie nicht! In anderen Worten, wir haben eine unendlich lange Abfolge von Zahlen, sodass eine bestimmte Zahl immer strikt größer ist als die vorige Zahl, aber doch sind alle Zahlen beschränkt! Wenn aber immer etwas positives dazu kommt, wieso geht die Folge x_n dann nicht gegen unendlich? Jede Zahl zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, die nicht gleich 1 ist, wird in "endlicher Zeit"von unserer Folge überholt, aber 1 nicht ... wie kann das?

Die Griechen hatten mit dieser Idee große Schwierigkeiten. Und seien wir mal ehrlich, wir doch auch? Oder? Die Griechen wollten nicht daran glauben, dass, wenn man unendlich viele positive Zahlen zusammen aufaddiert, das Ergebnis etwas endliches ist. Wieso soll etwas unendliches auf einmal endlich sein? Diese Problematik führte zu folgenden sehr interessanten Paradoxen:

Paradox 1: Problemstellung: Du willst die Straße überqueren. Soll doch kein Problem sein, oder? Laut dem bekannten griechischen Philosophen Zeno schon! Weil du zuerst die Hälfte der Straße überqueren musst. Dafür brauchst du Zeit; nicht viel vielleicht, aber etwas Zeit brauchst du dafür schon. Dann bleibt noch die Hälfte der Straße zum Überqueren übrig. Geht doch leicht, oder? Ja, vielleicht, aber dann kommt der Zeno noch einmal: von dieser Hälfte brauchst du sicher zuerst die Hälfte zurückgelegt zu haben, um überhaupt am Ende zu kommen. Und du wirst das Argument schon sehen; wenn du diese Hälfte zurückgelegt hast, dann brauchst du

[1] Zuerst einen Hinweis: beweise zuerst, dass $\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}$ für alle natürlichen Zahlen k.

dafür etwas Zeit und du bist noch nicht fertig. Du musst nähmlich von der restierenden Strecke zuerst die Hälfte zurücklegen. Und von dem Rest ist wieder zuerst die Hälfte zurückzulegen. Und immer brauchst du dafür etwas Zeit! Also brauchst du unendlich viel ein bisserl Zeit um einfach eine Straße zu überqueren; laut Zeno brauchst du also unendlich viel Zeit, um die Straße zu überqueren!

Paradox 2: Das Problem des Hasen und der Schildkröte. Ein Hase und eine Schildkröte machen ein Wettrennen, wer als erster eine bestimmte Strecke von, sagen wir, 300 Meter zurücklegt. Da schon bekannt ist, dass Hasen schneller sind als Schildkröten, verabreden beide, dass die Schildkröte 100 Meter Vorsprung nehmen darf. Machen wir die Problemstellung ganz einfach und nehmen wir an, dass ein Hase zweimal so schnell als eine Schildkröte laufen kann.

Die meisten werden schon damit einverstanden sein, dass der Hase die Schildkröte nach 200 Meter überholt, aber laut Zeno nicht! Weil, der Hase muss zuerst zum Punkt laufen, wo die Schildkröte angefangen hat. Dann aber ist die Schildkröte die Hälfte von 100 Metern - das sind 50 Meter - weiter, und der Hase muss zunächst zum Punkt laufen, wo die Schildkröte jetzt ist. Aber wenn der Hase letzten Endes diesen Punkt erreicht hat, muss er noch weiter, weil die Schildkröte jetzt die Hälfte der 50 Meter - das ist 25 Meter - weiter fortgelaufen ist. Aber wann endet es dann? Lauf Zeno muss der Hase also eine Strecke von

$$100 + 50 + 25 + 12\tfrac{1}{2} + \ldots = 100 + 100\Big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots\Big) \tag{8}$$

zurücklegen. Wir wiedererkennen natürlich gleich den Zusammenhang mit Formel (5) und wissen daher, dass der Hase nicht *nach* 200 Meter die Schildkröte überholt. Aber wie lange dauert das Ganze dann? Denkend auf die Art und Weise von Zeno kommt der Hase nie an der Schildkröte vorbei, weil jedes Mal, das der Hase den Punkt erreicht hat, wo die Schildkröte war, muss er noch die Hälfte vom gerade zurückgelegten Weg weiter; da der Hase für jeden dieser Schritte Zeit braucht, braucht er unendlich Mal ein wenig Zeit, die nicht Null ist. Daher braucht der Hase unendlich lange.

Diese Paradoxe zeigen dir, dass wenn wir auf funktionale Weisen mit unendlich langen Folgen umgehen wollen, wir hinnehmen müssen, dass eine unendliche Folge einen endlichen Grenzwert haben kann. So einen Grenzpunkt nennen wir einen Limes. So sagen wir, dass die Folge x_n, die wir vor Formel (7) definiert haben, den Grenzwert 1 hat, da wenn n größer wird, wir mehr in die Nähe von 1 kommen. Dies kürzen wir ab mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Wenn wir dann irgendwelche schlaue Rechenregeln finden können, dann können wir die obengenannten Paradoxe vielleicht lösen. Denn seien wir nicht übel, aber ein Hase überholt die Schildkröte - und in dem geschilderten Fall auch sicher wenn der Hase 200 Meter zurückgelegt hat - und du kannst die Straße überqueren. Wir müssen, um diese Paradoxe zu beseitigen, etwas mit unendlich anfangen können, und wir müssen irgendwie das Unendliche wieder endlich machen. Wenn uns das gelingt, dann können wir einfach schreiben

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{2^4} + \ldots = 1\,, \tag{9}$$

wo dann alle Weisheit, Schlauheit aber auch alle (beseitigten) Paradoxe in den Punkten ... hinter $\frac{1}{2^4}$ stecken.

Frohe Weihnachten!

euer Mathematiklehrer