Gleichungen Lernen – Mathematik – 3E

Selbstständiges Lernen

Lieber Schüler, Liebe Schülerin! Mit unterstehenden Aufgaben solltest du das Thema 'Gleichungen' recht gut selbstständig lernen können. Ich habe das Thema in Stückchen aufgeschnitten, sodass du in jeder Phase eine neue Strategie entwickelst. Im Allgemeinen ist die Strategie, eine Gleichung so umzuformen, sodass du eine Form bekommst, mit der du schon umgehen kannst. Das heißt, du wirst ständig eine Gleichung auf eine alte, bekannte Form zurückbringen, und dann kannst du sie lösen. Es gibt auch viele Selbstreflexionsfragen, die du ernst nehmen musst. Erst wenn du gut nachdenkst, was dir geholfen hat, was deine neue Einsicht und die erlernte Strategie ist, kommt du wirklich deutlich weiter.

Form 1(a): $x + a = b$

Folgende Gleichungen gehen wahrscheinlich recht leicht, aber mache sie trotzdem, und sei dir bewusst, wie du sie löst. Mache auch eine Probe; also, kontrolliere deine Antwort! Ein Beispiel: wenn $x + 3 = 7$ gegeben ist, subtrahiere ich links und rechts 3 und bekomme $x + 3 - 3 = 7 - 3$, also das ist $x = 7 - 3 = 4$. Unt tatsächlich $4 + 3 = 7$. Wenn statt $+x$ steht $-x$, dann geht es genau so, aber dann löst du zuerst nach $-x$, weil wenn du weißt, was $-x$ ist, dann ist dir x auch schon bekannt!

Aufgabe 1. Finde heraus, was x sein muss, damit es stimmt:

(a) $10 + x = 20$	**(d)** $5 - x = 3$	**(g)** $x + 5 = 8$
(b) $x - 3 = 6$	**(e)** $x + 100 = 1000$	**(h)** $x + 76 = 53$
(c) $x + 3 = 8$	**(f)** $x - 100 = 1000$	**(i)** $x - 76 = -100$

Aufgabe 2. Beschreibe in Worten (also, in Vollsätzen!!!), wie du obige Gleichungen gelöst hast. Was war deine Strategie? Was war noch schwierig? Kannst du jetzt selbst ähnliche Gleichungen aufstellen und auch lösen?

Achtung: du wirst gesehen haben, dass du ab und zu das Minuszeichen umdrehen musst: Wenn du bekommst $-x = 6$, dann ist also $x = -6$. Beispiel $100 - x = 60$, daraus mache ich zuerst $100 - x - 100 = 60 - 100$, also $-x = -40$. Dann ist die Lösung also $x = 40$. Kontrolliere jetzt, ob du diese Gleichungen oben mit $-x$ statt $+x$ verstanden hast.

Form 1(b): $ax = b$

Hier ist statt einer Subtraktion die Division die bestmögliche Operation. Zwei Beispiele: Erstens, $3x = 5$, dann dividiere ich durch 3 und finde $x = 5/3$. Kontrolliere selbst die Lösung. Zweitens: $\frac{2x}{5} = 10$, dies schreibe ich zuerst als $\frac{2}{5}x = 10$ und dann dividiere ich durch $\frac{2}{5}$, und bekomme $x = 10 : \frac{2}{5} = 10 \cdot \frac{5}{2}$ (weißt du noch, Dividieren durch eine Bruchzahl ist mit seinem Kehrwert Multiplizieren), also $x = 25$. Mache mal selbst die Probe!

Aufgabe 3. Löse nach x:

(a) $10x = 20$	**(d)** $5x = 7$	**(g)** $\frac{3x}{4} = 8$
(b) $3x = 6$	**(e)** $100x = 1000$	**(h)** $\frac{5x}{9} = 53$
(c) $3x = 8$	**(f)** $\frac{x}{100} = 1000$	**(i)** $3x = \frac{2}{3}$

Form 2: $ax + b = c$

Die zweite Form hat auch eine Zahl direkt vor x, also, x wird noch mit einer Zahl multipliziert. Wenn wir so eine Gleichung auf Form 1 zurückbringen wollen, können wir durch diese Zahl dividieren. Ein Beispiel: $3x + 8 = 44$. Wenn ich zuerst durch drei dividiere (das muss ich sowohl links als rechts tun!), habe ich links $(3x+8) : 3 = \frac{3x+8}{3} = 3x : 3 + 8 : 3 = x + \frac{8}{3}$. Auf der rechten Seite habe ich dann $\frac{44}{3}$. Insgesamt habe ich also eine Gleichung $x + \frac{8}{3} = \frac{44}{3}$. Achtung: wenn ich durch drei dividiere, kann ich das nicht nur halb machen! Was nicht geht ist: $(3x+8) : 3 = x+8$. Die Gleichung $x + \frac{8}{3} = \frac{44}{3}$ löse ich genau wie bei Form 1; wir subtrahieren $\frac{8}{3}$ links und rechts und bekommen $x = \frac{44}{3} - \frac{8}{3} = \frac{36}{3} = 12$.
Natürlich geht es auch etwas leichter! Aus $3x + 8 = 44$ mache ich dann zuerst $3x = 44 - 8 = 36$ indem ich links und rechts 8 subtrahiere. Danach kann ich dann durch 3 dividieren und bekomme dasselbe Ergebnis $x = 12$.
Also, entweder bringst du zuerst die Gleichung auf Form 1(a) zurück, indem du dividierst, oder du bringst die Gleichung auf Form 1(b) zurück indem du addierst oder subtrahierst.

Aufgabe 4.
Das nur teilweise Dividieren passiert oft: Kontrolliere selbst, dass das nicht geht. Tue das mit folgenden Beispielen:
(i) $(12 + 4) : 4 \neq 12 : 4 + 4$, (ii) $(100 + 50) : 10 \neq 10 + 50$, (iii) $\frac{200+40}{4} \neq 200 + 10$.

Aufgabe 5.
Man sagt manchmal “Aus der Summe kürzt nur der Dumme”. Schau dir obige Aufgabe nochmal an, und beschreibe, was diese Aussage bedeuten könnte.

Aufgabe 6. Löse folgende Gleichungen auf beide Weisen, die oben beschrieben sind (1: zuerst dividieren, dann addieren/subtrahieren — 2: zuerst addieren/subtrahieren, dann dividieren), und beschreibe, was dir leichter gefällt:

(a) $4x + 5 = 25$
(b) $7x + 30 = 65$
(c) $3x - 10 = 8$
(d) $2x + 10 = 20$

Aufgabe 7. Löse folgende Gleichungen auf die Weise, die du am leichtesten findest. Mache auch eine Probe! Achtung, das Ergebnis wird in der Regel keine ganze Zahl sein!

(a) $10 + 3x = 20$
(b) $7x - 21 = 60$
(c) $17x + 300 = 800$
(d) $33x + 99 = 111$
(e) $15 - 2x = 30$
(f) $4x + 100 = 1000$
(g) $5x - 100 = 1000$
(h) $10x + 60 = 4$

Form 3: $ax = bx + c$

Ein Beispiel: $3x = 5x + 4$, ich subtrahiere jetzt links und rechts $5x$ und bekomme $-2x = 4$, daraus folgt wieder $x = -2$.

Aufgabe 8. Löse nach x:

(a) $5x = 2x + 10$
(b) $7x = 3x + 8$
(c) $3x = 6x + 18$
(d) $6x = 10x - 3$
(e) $\frac{3x}{2} = \frac{x}{3} + 2$

Aufgabe 9. Schätze ein: Form 3 findest du (I) leicht, (II) mittelmäßig, oder (III) schwierig. Erkläre kurz warum!

Form 4: $ax + b = cx + d$

Diese können wir leicht auf Form 3 oder Form 2 zurückbringen. Wenn wir zuerst mit den x-en herumschieben, sodass alle x-en auf einer Seite stehen, dann haben wir Form 2. Schieben wir zuerst mit den einzelnen Zahlen herum, bekommen wir Form 3. Achtung, Terme mit x und Zahlen lassen sich nicht kombinieren: $3x + 2 \neq 5x$, mache mal die Probe mit $x = 0$, oder $x = 2$! Ein Beispiel $3x + 4 = 8x + 2$, ich subtrahiere links und rechts $3x$ und bekomme $4 = 5x + 2$, was ich schon lösen kann!

Aufgabe 10. Löse nach x und beschreibe in Worten, wie du die Aufgabe gelöst hast – beschreibe jeden Schritt!

(a) $3x + 3 = 5x + 8$

(b) $5x + 9 = 2x - 10$

(c) $7x + 4 = 88 + 9x$

(d) $99x + 1 = 100 + 2x$

(e) $100x - 5 = 25x + 125$

Aufgabe 11. Beschreibe deine Schwierigkeiten mit Form 4. Gib selbst Beispiele von Gleichungen, die dir Probleme bereiten.

Form 5: Mit Klammern!

Wenn du Terme mit Klammern siehst, dann kannst du zuerst die Klammern ausmultiplizieren, und das Ergebnis auf eine vorige Form zurückbringen. Ein Beispiel $3(x + 2) + 7 = 4x + 9$, ich multipliziere die eine Seite aus und bekomme $3x + 6 + 7 = 4x + 9$, also, das ist $3x + 13 = 4x + 9$, und das kann ich schon lösen. Machst du es fertig?

Aufgabe 12. Löse nach x und beschreibe, wie du es machst!

(a) $8(x + 3) + 5 = 5x + 8$

(b) $5(x + 9) + 3x = 2x - 10$

(c) $7(2x + 4) + 2 = 8 + 9x$

(d) $9(9x + 1) + 10x + 3 = 80 + 2x$

(e) $100(x - 5) + 2 = 2(x - 2) - 25$

Aufgabe 13. Machst du oft Fehler bei Klammer-Berechnungen? Beschreibe, was deine Feherl sind. Kannst du verstehen, warum du solche Fehler machst? Was macht dich eventuell unsicher in diesem Bereich? Wiederhole auch die Klammernregeln und Punkt-vor-Strich-Regeln.

Hilfe: Bruchzahlen!!!

Bruchzahlen haben eine schöne Eigenschaft: Wenn man mit dem Nenner multipliziert, werden sie zu ganzen Zahlen. Ein Beispiel: $\frac{2x}{3} + \frac{2}{7} = \frac{4}{5}$, hier multipliziere ich mit 5, 7 und 3, also mit der Zahl $5 \cdot 7 \cdot 3 = 105$, dann bekomme ich $70x + 30 = 84$, was ich schon lösen kann.

Aufgabe 14. Löse nach x und beschreibe, wie du es machst!

(a) $\frac{3}{4}x + \frac{5}{6} = x + 1$

(b) $\frac{1}{3}x + 9 = \frac{1}{2}x - 7$

(c) $x + \frac{3}{7} = 2(x - 1) + \frac{3}{4}$

Also, keine Angst vor Bruchzahlen! Wenn du mit Gleichungen spielst, kannst du Bruchzahlen mit lästigen Nennern los werden!

Ende und Ausblick

Jetzt hast du für sogenannte ‘lineare’ Gleichungen wohl alles gesehen. Du kannst natürlich alle Aspekte jetzt mischen und die meist grausamen Gleichungen aufstellen und sie lösen. Finde mal selbst einige im Buch und versuche deine Künste herauszufordern! Oder, denke dir selbst etwas grausames aus.
Es gibt auch Gleichungen, die nicht lösbar sind. Zwei Beispiele: $x+1 = x+2$, das geht niemals!!! Aber $2x + 4 = 4(\frac{x}{2} - 1)$ geht auch nicht.
Es gibt auch Gleichungen, die nicht linear sind. Zum Beispiel $x^2 + 3 = 4$, welche sogar zwei Lösungen hat! Nämlich, $x = +1$ und $x = -1$. Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung (in der reellen Zahlen – es gibt aber Tricks, das sind dann ‘neue Zahlen’, die wir später lernen, aber erst später). Aber aufhören tut es dort auch nicht. Kubische Gleichungen gibt es auch: $x^3 + 8x = 13$ zum Beispiel, oder quintische Gleichungen $x^5 + 3x^2 + 6x = 8$. Alles was du mit Variablen tun kannst, gibt wieder eine neue Familie von Gleichungen. Die Grundformen der linearen bilden doch eine gute Basis, die du immer wieder benutzen kannst. Viele Mathematiker beschäftigen sich damit, knifflige Gleichungen auf bekannte, wenn möglich, lineare Gleichungen zurückzuführen. Vielleicht machst du das mal! Auf jeden Fall möchte ich den folgenden Hinweis mitgeben: wenn du ein noch unbekanntes Problem lösen musst, führe sie auf bekannte Probleme zurück, dann bist du wieder wie zu Hause!

Alle Unterlagen auch auf

`www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`