Parabeln, quadratische Funktionen und Gleichungen

2014 Klasse 5A

Inhaltsverzeichnis

Hallo liebe SchülerInnen! Hier ist dann schon die **zweite** Version – Datum 08.01.2014.

In diesem Skriptum findest du mehrere Aufgaben, mit denen du das Thema 'quadratische Funktionen und Gleichungen' halbwegs selbst erforschen kannst. Wir teilen den Stoff auf, aber rechne damit, dass du oft auch zu Hause an diesen Aufgaben arbeiten musst, denn nichts kommt umsonst, auch Wissen und Können nicht!

1 Familien von quadratischen Funktionen

1.1 Familie $y = ax^2$

Aufgabe 1. Erstelle Graphen von den Funktionen $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2x^2$, $f_3(x) = -x^2$ und

$f_4 = \frac{1}{2}x^2$. Beschreibe in Worten, wie die Graphen zusammenhängen.

Merksatz M 1. Wenn ich in der Funktion $y = ax^2$ den Parameter a durch $-a$ ersetze, wird der Graph an der x-Achse gespiegelt.

Aufgabe 2. Kontrolliere den Merksatz anhand des Beispiels $y = \frac{1}{2}x^2$ und $y = -\frac{1}{2}x^2$

1.2 Familie $y = (x+b)^2$

Aufgabe 3. Erstelle den Graphen von (a) $y = (x+1)^2$, (b) $y = x^2$, (c) $y = (x-2)^2$ und beschreibe, wo die Nullstellen sind.

Merksatz M 2. Den Graphen der Funktion $f(x) = (x-b)$ bekomme ich aus dem Graphen von $g(x) = x^2$ indem uch den Graphen von g um b nach rechts verschiebe. (Wenn b negativ ist, wird es also nach links.)

1.3 Familie $y = x^2 + c$

Aufgabe 4. Seien $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = x^2 + 4$ gegeben. Berechne $g(x) - f(x)$ und drücke in eigenen Worten aus, wie die Graphen von f und g zusammenhängen.

1.4 Familie $y = a(x+b)^2 + c$

Aufgabe 5. Erstelle die Graphen von $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$ und $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$ in einer Figur.

Aufgabe 6. Gegeben ist die Funktion $y = 2(x+1)^2 - 8$. Diese Funktion hat ein Minimum, finde heraus, für welchen Wert von x. Diese Funktion hat zwei Nullstellen. Finde sie!

Merksatz M 3. Jede quadratische Funktion kann in der Form $y = a(x+b)^2 + c$ geschrieben werden.

Zusatzstoff: der allgemeine Beweis Ich gebe einen kleinen Beweis. Die meist allgemeine quadratische Funktion schaut so aus: $y = rx^2 + sx + t$. Das schreibe ich als $y = r(x^2 + \frac{s}{r}x) + r$. Jetzt schreibe ich das als: $y = r(x + \frac{s}{2r})^2 - \frac{s^2}{4r} + t$. Damit bin ich fertig, denn $a = r$, $b = \frac{s}{2r}$ und $c = t - \frac{s^2}{4r}$.

Was aber alle mal sehen müssen ist die Idee des Beweis anhand eines Beispiels: ich nehme $y = 3x^2 + 18x - 100$. Hier sind die Zahlen ein wenig schön gewählt, aber du wirst sehen, dass der Trick immer funktioniert. In einem ersten Schritt konzentriere ich mich auf $3x^2 + 18x$. Ich schreibe das als $3(x^2 + 6x)$. Nun ist im Allgemeinen $(x+b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$ also ist $x^2 + 6x$ genau ein Teil von $(x+3)^2$, nur dass eine Neun fehlt. Also, subtrahiere ich sie wieder: $x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9$, kontrolliere mal! Dann bin ich aber fertig, denn $3(x^2+6x)$ ist also $3(x+3)^2 - 3 \cdot 9 = 3(x+3)^2 - 27$. Dann setze ich alles zusammen und finde $3x^2 + 18x - 100 = 3(x+3)^2 - 27 - 100 = 3(x+3)^2 - 127$.

Zusatzaufgabe 1. Bringe die Funktion $y = 5x^2 + 4x - 1$ auf die Form $y = a(x+b)^2 + c$.

1.5 Familie $y = a(x-b)(x-c)$

Diese Familie hatten wir schon. Es gilt $y = 0$ wenn $x = b$ oder $x = c$ und das Extremum liegt genau zwischen b und c.

Aufgabe 7. Faktorisiere $y = 2x^2 + 6x - 8$ – das heißt, finde a, b und c sodass $2x^2 + 6x - 8 = a(x-b)(x-c)$.

Merksatz M 4. Nicht alle quadratische Funktionen kann man schreiben als $y = a(x-b)(x-c)$. Wenn es keine Nullstellen gibt, dann geht es nicht. Wenn es genau eine gibt, dann sind b und c gleich: $y = a(x-b)^2$ und wenn es zwei unterschiedliche Nullstellen gibt, dann kann man schreiben $y = a(x-b)(x-c)$ und $b \neq c$.

1.6 Familie $y = x^2 + px + q$

Merksatz M 5. Die Nullstellen von der meist allgemeinen quadratischen Gleichung $0 = ax^2 + bx + c$ (mit $a \neq 0$) sind dieselben wie die Nullstellen von $0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$. Daher reicht es, alle Nullstellen von $y = x^2 + px + q$ zu finden.

Wir werden nur einen Schritt in die Richtung machen.

Aufgabe 8. Betrachte die Funktion $f(x) = x^2 + 4x + 10$. Diese Funktion kannst du schreiben als $y = (x+b)^2 + c$, wo du dann b und c bestimmen musst. Das geht wie folgt: zuerst lösen wir die Klammern auf und bekommen: $y = x^2 + 2bx + b^2 + c$. Aber dann muss $2b = 4$ und $b^2 + c = 10$. (i) Finde b und c. (ii) Hat diese Funktion Nullstellen?, (iii) Wo liegt das Extremum?

Zusatzaufgabe 2. Mache dasselbe für $g(x) = x^2 - 5x + 3$

2 Computeraufgabe

Entweder mit Google oder mit Geogebra kannst du auch das Verhalten von Funktionen in verschiedenen Familien betrachten. Ich empfehle euch ernsthaft mindestens mit Google dies auszuprobieren. Man kann dann kontrollieren, ob die mit der Hand gemachten Aufgaben richtig sind :-).

Achtung: Bei Google muss man die Zahl $4,23$ so eingeben: 4.23. Also, keine Kommas bei Kommzahlen, sondern Punkte, wie bei deinem Taschenrechner. Das Divisionszeichen darfst du nicht benutzen, stattdessen benutzt du einen Schrägstrich /. Potenzen machst du mit dem Accent-Zeichen ($\wedge$). Zum Beispiel: x^2 eingeben geht so x^2.

3 Nullstellen finden

Ein großes Thema in der Mathematik ist das Finden der Nullstellen verschiedener Funktionen. Woher kommt dieses Problem? Oft hat man in einer Anwendung eine Funktion, die zB Energie, Kosten oder Gewinn beschreiben kann. Man will oft wissen, wann genau einen bestimmten Wert angenommen wird. Zum Beispiel, wann ist die globale Erwärmung so, dass die Temperatur in den Bergen in Dezember über $+2$ Grad Celsius liegt? Das schaut dann mathematisch so aus: für welchen x gilt $f(x) > 2$? Das löst man, indem man zuerst untersucht, wann Gleichheit gilt: $f(x) = 2$. Das lässt sich aber schreiben als $f(x) - 2 = 0$, eine Nullstellengleichung.

3.1 Satz von Vietà

Der Satz von Vietà lautet: Die Lösungen von $0 = x^2 + px + q$ sind

$$x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,, \quad \text{und} \quad x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ negativ ist, gibt es keine Lösungen, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ genau Null ist, gibt es nur eine Lösung. Man sieht, dass die Lösungen symmetrisch um den Punkt $x = -\frac{p}{2}$ liegen. Somit haben wir auch die Stelle des Extremums bestimmt.

Zusatzaufgabe 3. Ich habe den Satz von Vietà ein wenig gekürzt dargestellt. Forsche im Internet (in der Stunde mit Handy) und schreibe kurz auf, was laut Wikipedia der Satz von Vietà ist und gib in etwa einigen Zeilen, vllt mit Berechnung, den Zusammenhang mit der gekürzten Form an.

Die Nullstellen kann man auch so wie im Buch steht bestimmen: Sie 4.09 auf Seite 68. Wenn du den allgemeinen Beweis von Abschnitt 1.4 verstanden hast, wirst du sehen, dass es eine große Ähnlichkeit gibt.

Aufgabe 9. Mache 4.12 (a)(b)(c)

Aufgabe 10. Mache 4.13 (a)(b)

Aufgabe 11. Mache 4.15 (a)(b)

Aufgabe 12. Mache 4.24 (a): Hinweis, wenn x eine natürliche Zahl ist, dann ist $x+1$ die darauf folgende Zahl.

Zusatzaufgabe 4. Mache 4.24(b)(c)

Aufgabe 13. Mache 4.25. Hinweis: Nenne die Seitenlänge x und benutze Pythagoras um eine Gleichung mit x und r zu bekommen.

Aufgabe 14. Mache 4.27

Zusatzaufgabe 5. Mache 4.30 DER GOLDENE SCHNITT!!!

Aufgabe 15. Mache 4.36 (a)

Zusatzaufgabe 6. Mache 4.37

3.2 Zusatzstoff: abc-Satz

Die Gleichung $0 = ax^2 + bx + c$ wird gelöst durch

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{und} \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

wenn $b^2 - 4ac$ negativ ist, gibt es keine Lösungen, wenn $b^2 - 4ac$ Null ist, gibt es genau eine Lösung.

Zusatzaufgabe 7. Zeige, wie aus dem abc-Satz der Satz von Vietà folgt.

4 Das Extremum und wo es ist

Aufgabe 16. Die Funktionen vom Typ $y = ax^2 + bx + c$ mit $a > 0$ sind minimal, wenn $ax^2 + bx$ minimal ist. Multipliziere die Klammern in $a(x + \frac{b}{2a})^2$ aus und erkläre, dass $ax^2 + bx$ minimal ist, wenn $a(x + \frac{b}{2a})^2$ minimal ist. Darum liegt das Minimum genau bei $x = -\frac{b}{2a}$.

Aufgabe 17. Was muss man in der vorigen Aufgabe ändern, um den Fall $a < 0$ auch behandeln zu können?

5 Sekanten und Tangenten

Seien P und Q zwei Punkte auf dem Graphen der Funktion f. Dann ist die Gerade durch P und Q eine Sekante vom Graphen von f.

Eine Tangente am Graphen von f ist eine Gerade, die dem Graphen in einem Punkt *berührt*; die Gerade bleibt wechselt beim Berühren nicht die Seite auf der es vom Graphen liegt.

5.1 Steigung bei linearen Funktionen

Aufgabe 18. Sei $f(x) = 4x + 3$. (a) Berechne $f(8)$ und $f(5)$ und berechne $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(8)-f(5)}{8-5}$. (b) Berechne auch $\frac{f(13)-f(2)}{13-2}$. (c) Kannst du eine Vermutung für $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ aufstellen?

Wenn $f(x) = kx + d$ eine lineare Funktion ist, dann ist k die Steigung. Bei linearen Funktionen ist die Steigung k also immer das Verhältnis $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Hier ein Beweis: Ich nehme $x = a$ und $x = b$, dann $f(a) = ka + d$ und $f(b) = kb + d$. Also $f(a) - f(b) = ka + d - (kb + d) = ka + d - kb - d = ka - kb = k(a - b)$, also $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{k(a-b)}{a-b} = k$.

Merksatz M 6. Wenn P und Q zwei Punkte sind $P = (x_p|y_p)$, $Q = (x_q|y_q)$, dann ist die Steigung der Geraden durch P und Q genau $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q}$.

5.2 Steigung der Sekante

Hier behandele ich nur die Funktion $y = x^2$.

Aufgabe 19. Berechne die Steigung der Sekante durch die Punkte bei $x = 1$ und $x = 3$.

Aufgabe 20. Seien $P = (a|a^2)$ und $Q = (b|b^2)$ zwei Punkte. Warum liegen sie auf dem Graphen von $f(x) = x^2$?

Aufgabe 21. Faktorisiere $a^2 - b^2$ und berechne $\frac{a^2-b^2}{a-b}$.

5.3 Steigung der Tangente

Mit der vorigen Aufgabe können wir die Steigung der Tangente in einem Punkt ausrechnen. Wir werden dann zwar nur die Funktion $y = x^2$ nehmen, doch werden die Erkenntnisse uns später von Nutzen sein.

Aufgabe 22. Zeige mit der vorigen Aufgabe, dass die Tangente im Punkte $(a|a^2)$ die Steigung $2a$ hat. Hinweis: Eine Tangente ist ein Grenzfall einer Sekante: du nimmst die zwei Punkte immer enger auf einander. Das heißt hier also, dass du in dem von dir gefundenen Ausdruck für $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ die Variable b durch a ersetzt.

Aufgabe 23. Dieses "enger auf einander Nehmen" der Punkte auf der Parabel kann man grafisch schön darstellen. Zeichne den Graphen der Funktion $y = x^2$ und zeichne die Sekanten durch die (i) $a = 1$ und $b = 4$, (ii) $a = 1$ und $b = 3$, (iii) $a = 1$ und $b = 2$; und zeichne letztendlich die Tangente bei $(1|1)$.

5.4 Zusatzstoff: die Steigung der Tangente im allgemeinen Fall

Obwohl dies Zusatzstoff ist, rate ich allen, die ein wenig das Gefühl haben, sich mit dem Stoff bis jetzt auszukennen, diesen Abschnitt auch wirklich durchzunehmen. In den nächsten Jahren wirst du sehen, dass die Prinzipien in Physik und Mathematik vorkommen, nur ist die Erklärung dann viel kürzer und weniger geometrisch.

Die Funktion $y = ax^2$ steigt a-mal so schnell als die Funktion $y = x^2$. Das können wir jetzt explizit zeigen:

Zusatzaufgabe 8. Die Punkte $P_1 = (1|1)$ und $Q_1 = (3|9)$ liegen auf dem Graphen von $y = x^2$. Die Punkte $P_2 = (1|1)$ und $Q_2 = (3|18)$ liegen auf dem Graphen von $y = 2x^2$. (i) Kontrolliere das!, (ii) Berechne die Steigung der Geraden durch P_1 und Q_1, und berechne die Steigung der Geraden durch P_2 und Q_2.

Zusatzaufgabe 9. Allgemein: Sei $f(x) = ax^2$. Die Steigung der Sektante durch die Punkte $P = (p|ap^2)$ und $(q|aq^2)$ ist natürlich $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{ap^2-aq^2}{p-q}$. Gehe ähnlich vor wie in der letzten Aufgabe des Abschnitts "Steigung der Sekante" und vereinfache diesen Quotienten.

Zusatzaufgabe 10. Zeige mithilfe der vorigen Aufgabe, dass die Steigung der Tangente im Punkte $(p|ap^2)$ auf dem Graphen von $y = ax^2$ durch $2ap$ gegeben ist.

Zusatzaufgabe 11. Für eine Funktion, die die Summe zweier Funktionen ist, kann man leicht sehen, dass man die Steigungen der Tangenten auch aufaddieren muss: Sei h die Funktion $h = f + g$, also die Summe von g, dann ist $\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}$. Also, die Steigung der Summe ist die Summe der Steigungen. Zeige dies (i) für die zwei linearen Funktionen $f(x) = 3x$ und $g(x) = 2x + 1$, (ii) für die quadratischen Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2x^2$, (iii) für die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 3x + 1$.

Zusatzaufgabe 12. Berechne die Steigung der Tangente der Funktion $y = 2x^2 - 3x + 5$ für den Punkt mit $x = 3$.

6 Anwendungen

Aufgabe 24. Ballistik: Wenn eine Kugel unter einem Winkel von 45 Grad weggeschossen wird, wird seine Bahn etwa durch eine Parabel beschreiben. Wenn h die Höhe ist, und x die horizontale Entfernung, dann gilt ungefähr $h = -\frac{1}{18000}x^2 + x$. Berechne, wie weit die Kugel kommt, und wie hoch die Kugel maximal kommt.

Aufgabe 25. (i) Warum ist in der vorigen Aufgabe das Minuszeichen essentiell? Warum würde die Vorschrift $y = \dfrac{1}{18000}x^2 + x$ sicher nicht passen?

(ii) Ab einem bestimmten Wert von x ist die Formel $y = -\dfrac{1}{18000}x^2 + x$ nicht mehr gültig. Ab welchem Wert und warum?

Aufgabe 26. Wenn man von h_0 Metern ein (nicht zu leichter) Stein fallen lässt, dann ist die Höhe zu Zeit t Sekunden nach dem Loslassen durch $h(t) = h_0 - 4,9 \cdot t^2$. h in Meter, t in Sekunden. (i) Sei $h_0 = 50m$. Wie lange dauert der freie Fall? (ii) Drücke im Allgemeinen die Dauer des freien Falls in h_0 aus.

Aufgabe 27. Wenn g die Fallbeschleunigung ist (g ist auf Erde etwa $g = 9,81m/s^2$) und ein Stein ohne Reibung von h_0 Meter nach unten fallen gelassen wird, gilt $h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$. Drücke die Dauer des freien Falls in g und h_0 aus.

Zusatzaufgabe 13. Auf dem Mond ist die Fallbeschleunigung nur ein Sechstel von der auf der Erde. Wie verhalten sich die Zeiten eines freien Falls von gleicher Höhe? Hinweis: benutze die vorige Aufgabe.

6.1 Schnittpunkt Gerade mit Kreis oder Parabel

Aufgabe 28. Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 = 4$, also der Kreis mit Mittelpunkt $(0|0)$ und Radius 2. Des Weiteren ist gegeben die Gerade $l : 2x + 3y = 0$. Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte.

Aufgabe 29. Die Parabel $y = x^2 - 4$ schneidet die Gerade $y = 2x + 3$ in zwei Punkten. Bestimme die Koordinaten.

6.2 Maximalisierungsaufgaben

Aufgabe 30. Wir nehmen folgendes wirtschaftkundliches Modell: Die Anzahl N der verkauften AjHandys bei der Firma AyAy ist gegeben durch $N(p) = 1000000 - 1000p$, bei dem p der Preis ist. Also, wenn $p = 0$ werden alle Menschen sich ein Ajhandy kaufen und etwa eine Million Menschen wohnen dort in der Nähe. Wenn der Preis 1000 Euro ist, will keiner mehr ein Handy. Des weiteren nehmen wir an, die Funktion $N(p)$ sei linear. Der Ertrag ist Preis mal $N(p)$.

(i) Bestimme, wan der Ertrag maximal ist.

Es gibt natürlich auch Produktionskosten. Diese seien 500 Euro pro Exemplar. Da man immer genau so viel (bis auf eine Fehlermarge) produziert, wie viele verkauft werden, sind die totalen Produktionskosten zum Preis p durch $K(p) = 500N(p)$ gegeben. Der Gewinn ist Ertrag minus Kosten.

(ii) Zu welchem Preis wäre der Gewinn Null?

(iii) Wann ist der Gewinn maximal?

Aufgabe 31. Ein Bauer kann ein Stück Land von 400 Meter Umfang umzaunen. Nehmen wir an, er will ein Recheck umzaunen. Wenn das Rechteck Seiten a und b hat, dann $a + b = 200$. (i) Wenn eine Seite x ist, was ist dann die andere Seite? (ii) Zu gegebenem x, was ist der Flächeninhalt? (iii) Bei welchem Wert von x ist der Flächeinhalt maximal? (iv) Wenn er eine andere Form wählen könnte, welche Form würde dann den Flächeninhalt maximalisieren?