Planungsblatt Mathematik für die 5A

Datum: 31.03 - 04.04

Stoff

Wichtig !!! Nach dieser Woche verstehst du:

- **(a)** allgemeine Funktionen: Grafiken, Notation, Zuordnung, Mengen für Anfänger, Definitionsmenge, Wertemenge
- **(b)** lineare Funktionen: Steigung: (A) Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ und (B) $f(x+1) = f(x)+k$
- **(c)** indirekte Proportionalitäten: (A) $y = \frac{k}{x}$ (B) $yx = k$ (C) $x \mapsto ax \Longrightarrow y \mapsto y/a$

Schulübungen.

- **(a)** Besprechung der HÜ – siehe unten!
- **(b)** Dienstag: (i) HÜ-Bespr. (ii) In Gruppen die Aufgaben von den anderen bearbeiten, (iii) 9.02(a)(b), 9.04, 9.05, 9.07
- **(c)** Donnerstag: (i) HÜ-Bespr., (ii) vllt. ein Mini-Check, (iii) 9.10, (iv) Potenzaufgaben $y = ax^p$ für $p = 1, 2, 3, \ldots$, Beispiel aus Paragraph 9.3 (v) 9.34, 9.38, 9.41
- **(d)** Freitag: (i) HÜ-Bespr., (ii) vllt. ein Mini-Check, (iii) Besprechung von der Formel $F_{grav} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ (welche Abhängigkeiten sind in der Formel drinnen? – siehe auch 9.45), 9.42, 9.45, 9.48

Hausaufgaben

Donnerstag 03.04:

(i) Erledige 9.02(a)(b), 9.04, 9.05 und 9.07 und studiere sie richtig!
(ii) Studiere die Eigenschaften (A) $y = \frac{k}{x}$ (B) $yx = k$ (C) $x \mapsto ax \Longrightarrow y \mapsto y/a$ von indirekten Proportionalitäten richtig!

Freitag 04.04:

(i) Erledige 9.34, 9.38 und 9.41.
(ii) Studiere Paragraph 9.3 richtig!

Dienstag 08.04:

Erledige 9.42, 9.45 und 9.48.

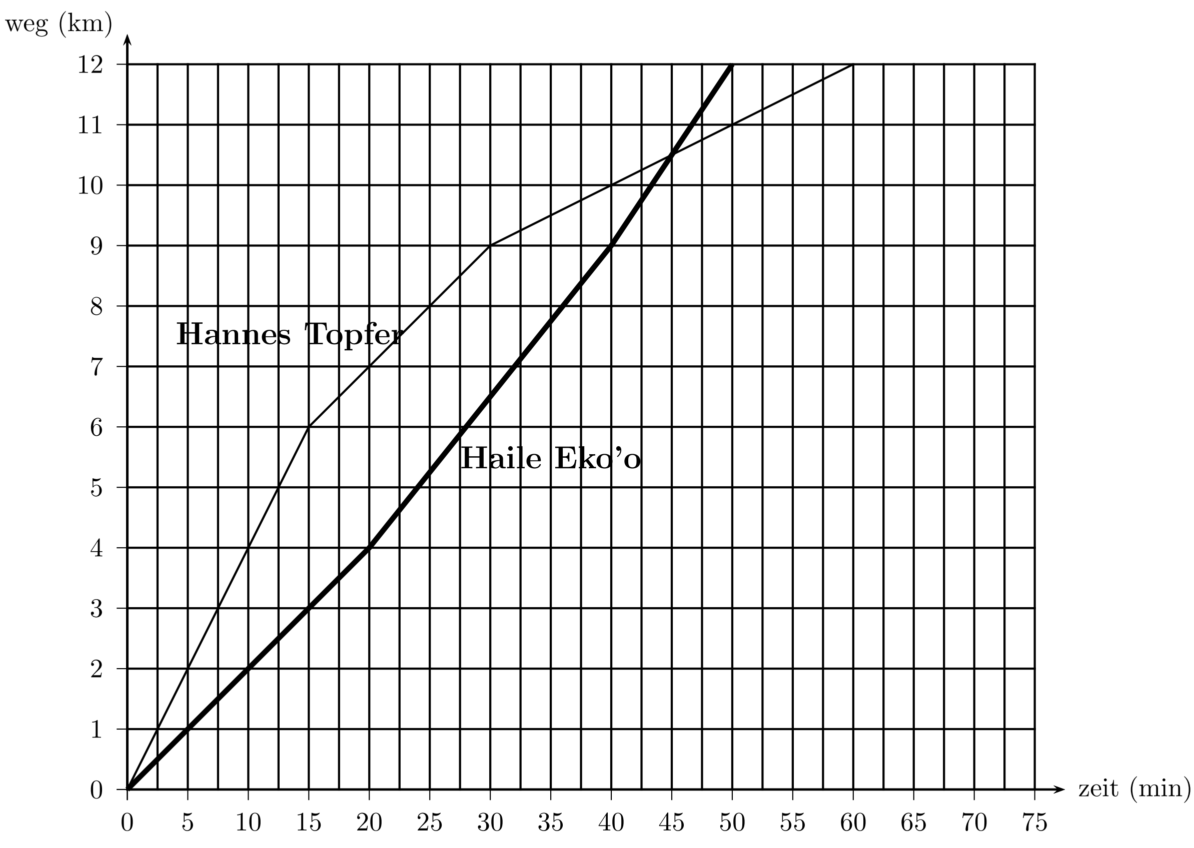
Alle Unterlagen auch auf
`www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

MINI-CHECK: Funktionen und lineare Funktionen

NAME: ________________________________

Aufgabe 1. Welche Zusammenhängen gelten (annäherungsweise)? Streiche das Falsche durch!
(i) Die Zeit, die man für eine Strecke von 100 km braucht ist direkt/indirekt proportional zur Geschwindigkeit.
(ii) Die Zeit, die man zu Fuß mit etwa 5 km/h für eine Strecke braucht, ist direkt/indirekt proportional zur Länge der Strecke.
(iii) Die Anzahl der Tage, die ein Team von Bauarbeitern für eine Wohnung braucht, ist direkt/indirekt proportional zur Größe des Teams.

Aufgabe 2. Zwei Läufer laufen eine Strecke. Hier unten siehst du die Weg-Zeit-Diagramme von den beiden.
(i) Der jüngere von den beiden fängt schneller an, wird aber später überholt. Wie heißt er?
(ii) Was ist die mittlere Geschwindigkeit vom älteren auf der Gesamtstrecke?
(iii) Wie viel Minuten wartet der Gewinner im Ziel auf den jüngeren?
(iv) Wie viel muss der jüngere noch laufen, als der ältere schon im Ziel war?
(v) Wie viel Vorsprung hatte der jüngere maximal auf den älteren?
(vi) Mit welcher Geschwindigkeit kam der jüngere ins Ziel?



Planung:

- Zum Thema 'Allgemeine Funktionen' (Kapitel 7 aus dem Buch): 7.03(a)(b)(c)(e), 7.05(a)(b), 7.07(b), 7.10, 7.15, *Studieraufgaben: 7.17, 7.18, 7.19*, 7.20, 7.21, 7.23, 7.26, 7.27(b)(d), 7.30(a)(d), 7.32, 7.36, *Studieraufgabe: 7.40*, 7.43, 7.45(a), 7.46(b), 7.47(c), 7.58, 7.59(1)(3), 7.61, 7.64, 7.67, 7.69(1)(3)(6).

- Lineare Funktionen werden wir etwas kürzer behandeln, da wir das meiste schon mal behandelt haben. Daher nur Paragraph 8.6 aus Kapitel 8. Ich werde aber den Inhalt von Satz(1) und Satz(2) samt Differenzenquotient erklären, und danach sollte das zum Standardrepertoir gehören. Aufgaben dazu: 8.87, 8.90(a)(b)(c)(d)(e)(g), 8.91: beweise $f(x+1) = f(x) + k$ und $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ ist konstant. 8.96: was bedeutet das?, 8.97, 8.99(a), 8.100, 8.104, 8.111.

- Funktionen für indirekte Proportionalität, Paragraph 9.1; Aufgabe 9.01 und Seite 171, Aufgabe 9.02(a)(b), 9.04, 9.05, 9.07, 9.10; Potenzfunktionen, die Anwendungen von Paragraph 9.3: Aufgaben 9.34, 9.38, 9.41, Besprechung von der Formel $F_{grav} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ (welche Abhängigkeiten sind in der Formel drinnen? – siehe auch 9.45), 9.42, 9.45, 9.48, 9.89, 9.92, 9.97, 9.108

- Gleichungssysteme mit zwei Variablen.

- Erweiterung Geometrie: Paragraph 12.4.

- Zahlenbereiche: Kapitel 3.

Aufgaben mit mehr Text in der Angabe

Es werden in Zukunft immer mehr Aufgaben mit mehr Text auf euch zukommen. Das ist eine Folge von Änderungen im Unterrichtssystem (Stichwort Zentralmatura). Manche Bücher haben schon eine Menge an Beispielen. Ich werde hier unten einige Aufgaben zeigen, die ich erstellt habe, und die als Ziel haben, euch eine Menge an Aufgaben mit größeren Texten anzubieten. Darüber hinaus werde ich mehrere Begriffe aus der Unterstufe verwenden, um so das Vokabular von euch zu stärken. Ich hoffe, diese Menge wird mit der Zeit wachsen und euch eine gute zusätzliche Vorbereitung anbeiten.

Aufgabe X1. Eine vollkommene Zahl ist eine natürliche Zahl größer als 1, die gleich der Summe ihrer Teiler ohne sich selbst sind. Das heißt Folgendes: Für eine ganze Zahl a größer 1 nimmt man die Teiler kleiner als a. Von diesen Zahlen nimmt man dann die Summe. Ist diese Summe gleich a, so ist a eine vollkommene Zahl. Ein Beispiel: Die Zahl 6 ist vollkommen, da die Teiler von 6 die Zahlen 1, 2, 3 und 6 sind. Die Summe ohne 6 ist dann $1 + 2 + 3 = 6$. Die Zahl 8 ist keine vollkommende Zahl, da die Teiler von 8 die Zahlen 1, 2, 4 sind und $1 + 2 + 4 = 7$. Kontrolliere, dass 28 eine vollkommene Zahl ist. (Bonus: die erstnächste vollkommene Zahl ist 496; kontrolliere das!)

Aufgabe X2. Bei radioaktiven Stoffen zerfallen in gleichen Zeitintervallen gleiche Anteile einer Menge. Anhand eines Beispiels wird dies wohl deutlich: Von einer Menge vom radioaktiven Stoff Rara zerfällt jede Stunde ein Zehntel der vorhandenen Menge. Bei diesem Zerfall fallen die Atome von Rara in Atome Dada und Lala auseinander. Also, aus einem Atom Rara wird ein Atom Dada und ein Atom Lala. Wenn wir mit einem Kilogramm Rara anfangen ist nach einer Stunde nur noch 90% Rara, also 900 Gramm Rara vorhanden. Die fehlende 100 Gramm bestehen dann aus Dada- und Lala-Atomen. Nach noch einer Stunde ist dann wieder 10 % zerfallen, aber dann 10% von den vorhandenen 900 Gramm, also 90 Gramm. Das heißt, dass nach zwei Stunden nur noch 810 Gramm Rara. (A) Berechne wie viel Rara nach drei, vier und fünf Stunden noch vorhanden sind. (B) Begründe, dass nach n Stunden noch $(0,9)^n \cdot 1000$ Gramm Rara vorhanden ist. (C) Finde heraus, wann weniger als ein Zehntel des vorhandenen Rara vorhanden ist.

Aufgabe X3. Eine Parabel schneidet den Einheitskreis in drei Punkten. Die drei Punkte sind die folgende: Das Extremum der Parabel liegt im Punkt $(0|-1)$ und die Nullstellen der Parabel fallen mit den Schnittpunkten des Kreises mit der x-Achse zusammen. Also, wo der Kreis die x-Achse schneidet, schneidet auch die Parabel die x-Achse. Finde a, b und c sodass die Parabel durch $y = ax^2 + bx + c$ gegeben ist.

Aufgabe X4. Gegeben ist die Parabel $y = x^2 + 2$. Mit einer Skizze sieht man leicht, dass es zwei Tangenten an der Parabel durch $(0|0)$ gibt. In dieser Aufgabe musst du die algebraische Darstellung $y = kx + d$ für beide diese Tangenten finden. (i) Was kannst du über k und/oder d einer Geraden $y = kx + d$ sagen, wenn diese Gerade durch den Punkt $(0|0)$ geht? (ii) Mit dem Wissen von Teil (i) kannst du eine quadratische Gleichung aufstellen: die Gerade $y = kx + d$ schneidet die Parabel wenn $kx + d = x^2 + 2$. Benutze dein Ergebnis von (i) um die Gleichung $kx + d = x^2 + 2$ zu vereinfachen und bringe sie auf die Form $x^2 + px + q = 0$. Hierbei werden p und q von einem Parameter abhängen. (iii) Deine quadratische Gleichung hat entweder 2, oder 1 oder 0 Lösungen. Bestimme k und d jetzt so, dass die Gleichung von (ii) nur eine Lösung hat. (iv) Beantworte jetzt die Frage, welche zwei Geraden $y = kx + d$ die zwei Tangenten an der Parabel, die durch $(0|0)$ gehen, darstellen.

Aufgabe X5. Ein Schiff fährt mit $15km/h$ durch den pazifischen Ozean. In der Nähe von französisch Polynesien muss man aufpassen, nicht auf eine Insel zu fahren. Aus Sicherheitsgründen ist es am besten, ein Schiff bleibt auf 2 km einer Insel entfernt. Ein Kapitän mißt einen Winkel zwischen Insel und Fahrtrichtung von 20 Grad. Zwanzig minuten später mißt er einen Winkel zwischen Insel und Fahrtrichtung von 50 Grad. (a) Mache eine Konstruktion mit einem selbst gewählten Maßstab und entscheide, ob der Kapitän zu nah an der Insel vorbeifahren wird oder nicht. (b) Berechne die minimale Distanz zwischen Schiff und Insel, falls der Kapitän den

Kurs nicht wechselt. Benutze dabei den Sinussatz $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$.

Aufgabe X6. Betrachte den folgenden Satz: *Die Summe der n ersten geraden Zahlen ist dem Produkt aus n und $n+1$ gleich.* Du musst nun diese Aufgabe nicht beweisen, sondern (a) diesen Satz kontrollieren für $n = 1$ bis $n = 10$, und zeigen, dass aus diesem Satz folgt, dass die Aussage $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ wahr ist. Einen Hinweis gebe ich dir dabei: Dividieren durch zwei.

Aufgabe X7. Manche natürliche Zahlen lassen sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen. Man sollte dabei im Auge behalten, dass eine Quadratzahl eine Zahl der Gestalt a^2 ist, bei dem a auch wieder eine natürliche Zahl ist. Somit ist eine Quadratzahl das Quadrat einer natürlichen Zahl. Wir nennen die natürlichen Zahlen, die sich als Summe zweier Zahlen lassen Tanzahlen. Jede Quadratzahl ist eine Tanzahl, denn $a^2 = a^2 + 0^2$. Deine Aufgabe ist es, alle Tanzahlen kleiner als 25 zu finden.

Aufgabe X8. Bei einem Patienten wird ein schmerzenlinderndes Medikament intravenös eingebracht. Das erste Mal wird jede Stunde die Konzentration dieses Schmerzmittels im Blut des Patienten gemessen. Wenn man die Messungen graphisch darstellt, sieht man, dass die Punkte etwa auf dem Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{10x^2}{4 + 5^x}$$

liegen. Hierbei ist f die Konzentration in mg pro Liter und x ist die Zeit in Stunden. Man macht diese Messungen um zu wissen, wie der Patient auf das Medikament reagiert und wie schnell er das Medikament abbaut, sodass man nach diesen Messungen weiß, wann man wieder eine Dosis zudienen muss, und also auch, wie viele Dosen der Patient pro Tag braucht.
(a) Zeichne den Graphen indem du eine Wertetabelle mit $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ und so weiter benutzt.
(b) Wenn die Konzentration weniger als 0,2 mg/L ist, sollte man wieder eine neue Dosis geben. Wie viele Dosen bekommt der Patient etwa pro Tag?

Aufgabe X9. In der Unterstufe lernt man die Regel, dass eine (ganze) Zahl durch drei teilbar ist, wenn die Ziffernsumme durch drei teilbar ist. In dieser Aufgabe wirst du das selbst begründen. Dazu ist es wichtig zu wissen, dass wenn A und B durch drei teilbar ist, dann sind $A + B$ und $A - B$ das auch. Beweis: Wenn A durch drei teilbar ist, dann gilt $A = 3E$ für eine ganze Zahl E, wenn B durch 3 teilbar ist, gibt es eine ganze F mit $B = 3F$. Dann folgt aber $A + B = 3E + 3F = 3(E + F$, also $(A + B) : 3 = E + F$ und Rest Null.
(i) Beweise, die zweite Aussage: Wenn A und B durch drei teilbar sind, dann $A - B$ auch.
(ii) Umgekehrt, ist A durch drei teilbar, aber B nicht, dann sind $A+B$ und $A-B$ das auch nicht. Beweise dies! Hinweis: Schreibe $A = 3E$ und für B nimmst du $B = 3F + 1$ oder $B = 3F + 2$, denn bei Division von B durch 3 bekommst du Rest 1 oder Rest 2.
(iii) Um zu kontrollieren, ob eine Zahl durch drei teilbar ist, können wir also wie folgt vorgehen. Wir wollen wissen, ob A durch drei teilbar ist. Wenn wir wissen, dass eine Zahl B, die aber kleiner als A ist, durch drei teilbar ist, dann ersetzen wir A durch $A - B$ und wiederholen das Ganze. Ein Beispiel; um zu wissen ob 500 durch drei teilbar ist, subtrahiere ich 300, weil 300 sicher durch drei teilbar ist. Also, um zu wissen, Die Frage, ob 500 durch drei teilbar ist, ist äquivalent zur Frage ob 200 durch zwei teilbar ist. Mache mit diesem Beispiel weiter!
(iv) Kontrolliere, dass die Zahlen 9 99 999 9999 usw. durch drei teilbar sind.
(v) Beweise, dass die Zahlen 1, 10, 100, 1000 usw. immer Rest 1 bei Division durch drei haben.
(vi) Um zu wissen ob 2345 durch 3 teilbar ist, schreiben wir diese Zahl als $2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5$, dann subtrahieren wir folgende Vielfache von drei $2 \cdot 999 + 3 \cdot 99 + 4 \cdot 9$. Zeige, dass wir dann die Ziffernsumme bekommen.
(v) Schreibe jetzt in eigenen Worten auf, warum Teilbarkeit einer Zahl durch drei äquivalent zur Teilbarkeit der Ziffernsumme durch drei ist.