Planungsblatt Mathematik für die 5A

Datum: 02.06 - 06.06

Stoff

Wichtig !!! Nach dieser Woche verstehst du:
(a) Anwendungen der Vektorrechnung

Schulübungen.
(a) Besprechung der HÜ – siehe unten!
(b) Dienstag: (i) HÜ-Bespr., (ii) Max Parkos zeigt den Beweis der Schwerpunkte im Dreieck, (iii) Besprechung des Arbeitsauftrags der vorigen Woche, (iv) 12.73, 12.74, 12.77
(c) Donnerstag: (i) HÜ-Bespr., (ii) der Beweis, dass die Diagonalen sich halbieren, wenn ein Viereck ein Parallelogramm ist – daher, die Mittelpunkte der Kanten eines Vierecks bilden ein Parallelogramm, (iii) Einige Berechnungen mit dem inneren Produkt: $\vec{A} \cdot \vec{B} = ||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}|| \cdot \cos(\vec{A}, \vec{B})$. Beispiele rechnen, wo geraden sich schneiden.
(d) Freitag: (i) HÜ-Bespr, (ii) Eigene Aufgabe: Von einem Dreieck können wir annehmen $A = (0|0)$, $B = (b|0)$ und $C = (p|q)$. Gib eine Parameterdarstellung von zwei Schwerlinien und zeige auf diesem Weg, dass die Schwerlinien sich in einem Verhältnis 2 : 1 teilen. (iii) Aufgaben: 13.35, 13.36(a)(b), Satz auf Seite 243, 13.60

Hausaufgaben

Donnerstag 05.06:
Begründe, warum sich die Winkelsymmetralen eines Dreiecks genau in einem Punkt schneiden.
Freitag 06.06:
Begründe, warum sich die Höhen eines Dreiecks genau in einem Punkt schneiden.
Dienstag 10.06:
Kein Unterricht (?)

Alle Unterlagen auch auf
`www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

Arbeitsauftrag – Kompetenzüberprüfung zur Vektorgeometrie

NAME: ____

Aufgabe 1. Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$ mit $A = (-2|0)$, $B = (2|0)$ und $C = (1|3)$.
(a) Zeichne das Dreieck in ein Koordinatensystem ein.
(b) Benutze Sinus und Cosinus, um die Koordinaten von C zu berechnen(!!!).
(c) Berechne den Schwerpunkt von $\triangle ABC$.
(d) Sei $X \in AB$ so, dass $\overline{AX} : \overline{BX} = 1 : 2$; sei $Y \in BC$ so, dass $\overline{BY} : \overline{YC} = 1 : 2$; sei $Z \in AC$ so, dass $\overline{CZ} : \overline{ZA} = 1 : 2$. Berechne die Koordinaten von X, Y und Z.
(e) Berechne den Schwerpunkt von $\triangle XYZ$.

Aufgabe 2. Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$.
(a) Drücke den Schwerpunkt von $\triangle ABC$ in A, B und C aus.
(b) Sei $X \in AB$ so, dass $\overline{AX} : \overline{BX} = 1 : 2$; sei $Y \in BC$ so, dass $\overline{BY} : \overline{YC} = 1 : 2$; sei $Z \in AC$ so, dass $\overline{CZ} : \overline{ZA} = 1 : 2$. Drücke X, Y und Z in A, B und C aus.
(c) Drücke den Schwerpunkt von $\triangle XYZ$ in A, B und C aus. Was fällt dir auf?

Planung:

- Zum Thema 'Allgemeine Funktionen' (Kapitel 7 aus dem Buch): 7.03(a)(b)(c)(e), 7.05(a)(b), 7.07(b), 7.10, 7.15, *Studieraufgaben: 7.17, 7.18, 7.19*, 7.20, 7.21, 7.23, 7.26, 7.27(b)(d), 7.30(a)(d), 7.32, 7.36, *Studieraufgabe: 7.40*, 7.43, 7.45(a), 7.46(b), 7.47(c), 7.58, 7.59(1)(3), 7.61, 7.64, 7.67, 7.69(1)(3)(6).

- Lineare Funktionen werden wir etwas kürzer behandeln, da wir das meiste schon mal behandelt haben. Daher nur Paragraph 8.6 aus Kapitel 8. Ich werde aber den Inhalt von Satz(1) und Satz(2) samt Differenzenquotient erklären, und danach sollte das zum Standardrepertoir gehören. Aufgaben dazu: 8.87, 8.90(a)(b)(c)(d)(e)(g), 8.91: beweise $f(x+1) = f(x) + k$ und $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ ist konstant. 8.96: was bedeutet das?, 8.97, 8.99(a), 8.100, 8.104, 8.111.

- Funktionen für indirekte Proportionalität, Paragraph 9.1; Aufgabe 9.01 und Seite 171, Aufgabe 9.02(a)(b), 9.04, 9.05, 9.07, 9.10; Potenzfunktionen, die Anwendungen von Paragraph 9.3: Aufgaben 9.34, 9.38, 9.41, Besprechung von der Formel $F_{grav} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ (welche Abhängigkeiten sind in der Formel drinnen? – siehe auch 9.45), 9.42, 9.45, 9.48, 9.89, 9.92, 9.97, 9.108

- Gleichungssysteme mit zwei Variablen: 10.03(b), 10.04(c), 10.05(d), 10.09, 10.14, 10.17, 10.21, 10.24 und 10.25 lesen und verstehen, 10.27(a)(b)(c), 10.28(a)(b)(c), 10.29(a)(b)(c), 10.30, 10.31(a)(b), 10.32(a), 10.33(a), 10.36, 10.37, 10.39, 10.42, 10.44, 10.48, 10.55, 10.56, 10.57, 10.58

- Erweiterung Geometrie: Paragraph 12.4: 12.44(a)(b), 12.45(a), 12.46(a), 12.47, 12.48 (*), Beweis vom Verhältnis $2:1$ beim Schwerpunkt, , 12.49(a), 12.51(*), 12.52(a), 12.58, 12.66(*), 12.67(*), 12.68(a), 12.72(*), 12.73, 12.74, 12.77;

- Kapitel 13: Sinus- und Kosinussatz in der Geometrie: 13.35, 13.36(a)(b), Satz auf Seite 243, 13.60

- Zahlenbereiche: Kapitel 3: Seiten 36, 37 und 38, 3.02, 3.03, 3.04, 3.05, 3.06, 3.08(b), 3.09(a), Abschnitt 3.2, 3.26(a)(b), 3.27, 3.29, 3.31

Aufgaben mit mehr Text in der Angabe

Es werden in Zukunft immer mehr Aufgaben mit mehr Text auf euch zukommen. Das ist eine Folge von Änderungen im Unterrichtssystem (Stichwort Zentralmatura). Manche Bücher haben schon eine Menge an Beispielen. Ich werde hier unten einige Aufgaben zeigen, die ich erstellt habe, und die als Ziel haben, euch eine Menge an Aufgaben mit größeren Texten anzubieten. Darüber hinaus werde ich mehrere Begriffe aus der Unterstufe verwenden, um so das Vokabular von euch zu stärken. Ich hoffe, diese Menge wird mit der Zeit wachsen und euch eine gute zusätzliche Vorbereitung anbeiten.

Aufgabe X1. Eine vollkommene Zahl ist eine natürliche Zahl größer als 1, die gleich der Summe ihrer Teiler ohne sich selbst sind. Das heißt Folgendes: Für eine ganze Zahl a größer 1 nimmt man die Teiler kleiner als a. Von diesen Zahlen nimmt man dann die Summe. Ist diese Summe gleich a, so ist a eine vollkommene Zahl. Ein Beispiel: Die Zahl 6 ist vollkommen, da die Teiler von 6 die Zahlen 1, 2, 3 und 6 sind. Die Summe ohne 6 ist dann $1 + 2 + 3 = 6$. Die Zahl 8 ist keine vollkommende Zahl, da die Teiler von 8 die Zahlen 1, 2, 4 sind und $1 + 2 + 4 = 7$. Kontrolliere, dass 28 eine vollkommene Zahl ist. (Bonus: die erstnächste vollkommene Zahl ist 496; kontrolliere das!)

Aufgabe X2. Bei radioaktiven Stoffen zerfallen in gleichen Zeitintervallen gleiche Anteile einer Menge. Anhand eines Beispiels wird dies wohl deutlich: Von einer Menge vom radioaktiven Stoff Rara zerfällt jede Stunde ein Zehntel der vorhandenen Menge. Bei diesem Zerfall fallen die Atome von Rara in Atome Dada und Lala auseinander. Also, aus einem Atom Rara wird ein Atom Dada und ein Atom Lala. Wenn wir mit einem Kilogramm Rara anfangen ist nach einer Stunde nur noch 90% Rara, also 900 Gramm Rara vorhanden. Die fehlende 100 Gramm bestehen dann aus Dada- und Lala-Atomen. Nach noch einer Stunde ist dann wieder 10 % zerfallen, aber dann 10% von den vorhandenen 900 Gramm, also 90 Gramm. Das heißt, dass nach zwei Stunden nur noch 810 Gramm Rara. (A) Berechne wie viel Rara nach drei, vier und fünf Stunden noch vorhanden sind. (B) Begründe, dass nach n Stunden noch $(0,9)^n \cdot 1000$ Gramm Rara vorhanden ist. (C) Finde heraus, wann weniger als ein Zehntel des vorhandenen Rara vorhanden ist.

Aufgabe X3. Eine Parabel schneidet den Einheitskreis in drei Punkten. Die drei Punkte sind die folgende: Das Extremum der Parabel liegt im Punkt $(0|-1)$ und die Nullstellen der Parabel fallen mit den Schnittpunkten des Kreises mit der x-Achse zusammen. Also, wo der Kreis die x-Achse schneidet, schneidet auch die Parabel die x-Achse. Finde a, b und c sodass die Parabel durch $y = ax^2 + bx + c$ gegeben ist.

Aufgabe X4. Gegeben ist die Parabel $y = x^2 + 2$. Mit einer Skizze sieht man leicht, dass es zwei Tangenten an der Parabel durch $(0|0)$ gibt. In dieser Aufgabe musst du die algebraische Darstellung $y = kx + d$ für beide diese Tangenten finden. (i) Was kannst du über k und/oder d einer Geraden $y = kx + d$ sagen, wenn diese Gerade durch den Punkt $(0|0)$ geht? (ii) Mit dem Wissen von Teil (i) kannst du eine quadratische Gleichung aufstellen: die Gerade $y = kx + d$ schneidet die Parabel wenn $kx + d = x^2 + 2$. Benutze dein Ergebnis von (i) um die Gleichung $kx + d = x^2 + 2$ zu vereinfachen und bringe sie auf die Form $x^2 + px + q = 0$. Hierbei werden p und q von einem Parameter abhängen. (iii) Deine quadratische Gleichung hat entweder 2, oder 1 oder 0 Lösungen. Bestimme k und d jetzt so, dass die Gleichung von (ii) nur eine Lösung hat. (iv) Beantworte jetzt die Frage, welche zwei Geraden $y = kx + d$ die zwei Tangenten an der Parabel, die durch $(0|0)$ gehen, darstellen.

Aufgabe X5. Ein Schiff fährt mit $15 km/h$ durch den pazifischen Ozean. In der Nähe von französisch Polynesien muss man aufpassen, nicht auf eine Insel zu fahren. Aus Sicherheitsgründen ist es am besten, ein Schiff bleibt auf 2 km einer Insel entfernt. Ein Kapitän mißt einen Winkel zwischen Insel und Fahrtrichtung von 20 Grad. Zwanzig minuten später mißt er einen Winkel zwischen Insel und Fahrtrichtung von 50 Grad. (a) Mache eine Konstruktion mit einem selbst gewählten Maßstab und entscheide, ob der Kapitän zu nah an der Insel vorbeifahren wird oder nicht. (b) Berechne die minimale Distanz zwischen Schiff und Insel, falls der Kapitän den

Kurs nicht wechselt. Benutze dabei den Sinussatz $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$.

Aufgabe X6. Betrachte den folgenden Satz: *Die Summe der n ersten geraden Zahlen ist dem Produkt aus n und $n+1$ gleich.* Du musst nun diese Aufgabe nicht beweisen, sondern (a) diesen Satz kontrollieren für $n = 1$ bis $n = 10$, und zeigen, dass aus diesem Satz folgt, dass die Aussage $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ wahr ist. Einen Hinweis gebe ich dir dabei: Dividieren durch zwei.

Aufgabe X7. Manche natürliche Zahlen lassen sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen. Man sollte dabei im Auge behalten, dass eine Quadratzahl eine Zahl der Gestalt a^2 ist, bei dem a auch wieder eine natürliche Zahl ist. Somit ist eine Quadratzahl das Quadrat einer natürlichen Zahl. Wir nennen die natürlichen Zahlen, die sich als Summe zweier Zahlen lassen Tanzahlen. Jede Quadratzahl ist eine Tanzahl, denn $a^2 = a^2 + 0^2$. Deine Aufgabe ist es, alle Tanzahlen kleiner als 25 zu finden.

Aufgabe X8. Bei einem Patienten wird ein schmerzenlinderndes Medikament intravenös eingebracht. Das erste Mal wird jede Stunde die Konzentration dieses Schmerzmittels im Blut des Patienten gemessen. Wenn man die Messungen graphisch darstellt, sieht man, dass die Punkte etwa auf dem Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{10x^2}{4 + 5^x}$$

liegen. Hierbei ist f die Konzentration in mg pro Liter und x ist die Zeit in Stunden. Man macht diese Messungen um zu wissen, wie der Patient auf das Medikament reagiert und wie schnell er das Medikament abbaut, sodass man nach diesen Messungen weiß, wann man wieder eine Dosis zudienen muss, und also auch, wie viele Dosen der Patient pro Tag braucht.
(a) Zeichne den Graphen indem du eine Wertetabelle mit $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ und so weiter benutzt.
(b) Wenn die Konzentration weniger als 0,2 mg/L ist, sollte man wieder eine neue Dosis geben. Wie viele Dosen bekommt der Patient etwa pro Tag?

Aufgabe X9. In der Unterstufe lernt man die Regel, dass eine (ganze) Zahl durch drei teilbar ist, wenn die Ziffernsumme durch drei teilbar ist. In dieser Aufgabe wirst du das selbst begründen. Dazu ist es wichtig zu wissen, dass wenn A und B durch drei teilbar ist, dann sind $A + B$ und $A - B$ das auch. Beweis: Wenn A durch drei teilbar ist, dann gilt $A = 3E$ für eine ganze Zahl E, wenn B durch 3 teilbar ist, gibt es eine ganze F mit $B = 3F$. Dann folgt aber $A + B = 3E + 3F = 3(E + F$, also $(A + B) : 3 = E + F$ und Rest Null.
(i) Beweise, die zweite Aussage: Wenn A und B durch drei teilbar sind, dann $A - B$ auch.
(ii) Umgekehrt, ist A durch drei teilbar, aber B nicht, dann sind $A+B$ und $A-B$ das auch nicht. Beweise dies! Hinweis: Schreibe $A = 3E$ und für B nimmst du $B = 3F + 1$ oder $B = 3F + 2$, denn bei Division von B durch 3 bekommst du Rest 1 oder Rest 2.
(iii) Um zu kontrollieren, ob eine Zahl durch drei teilbar ist, können wir also wie folgt vorgehen. Wir wollen wissen, ob A durch drei teilbar ist. Wenn wir wissen, dass eine Zahl B, die aber kleiner als A ist, durch drei teilbar ist, dann ersetzen wir A durch $A - B$ und wiederholen das Ganze. Ein Beispiel; um zu wissen ob 500 durch drei teilbar ist, subtrahiere ich 300, weil 300 sicher durch drei teilbar ist. Also, um zu wissen, Die Frage, ob 500 durch drei teilbar ist, ist äquivalent zur Frage ob 200 durch zwei teilbar ist. Mache mit diesem Beispiel weiter!
(iv) Kontrolliere, dass die Zahlen 9 99 999 9999 usw. durch drei teilbar sind.
(v) Beweise, dass die Zahlen 1, 10, 100, 1000 usw. immer Rest 1 bei Division durch drei haben.
(vi) Um zu wissen ob 2345 durch 3 teilbar ist, schreiben wir diese Zahl als $2{\cdot}1000{+}3{\cdot}100{+}4{\cdot}10{+}5$, dann subtrahieren wir folgende Vielfache von drei $2 \cdot 999 + 3 \cdot 99 + 4 \cdot 9$. Zeige, dass wir dann die Ziffernsumme bekommen.
(v) Schreibe jetzt in eigenen Worten auf, warum Teilbarkeit einer Zahl durch drei äquivalent zur Teilbarkeit der Ziffernsumme durch drei ist.

Aufgabe X10. Wir betrachten in dieser Aufgabe ein bestimmtes Tier, nämlich, eine Giraffe. Wir werden aber dabei die Größe variieren. Dabei bleiben aber alle Proportionen, also alle

Verhältnisse gleich. Die Körperlänge einer Giraffe wird mit L angedeutet. Wir benutzen die Notation $a \sim b$ für "a ist direkt proportional zu b".
(1) Wenn eine Giraffe $a$mal so groß wird, dann nimmt die Menge an Blut mit einem Faktor a^3 zu. Die Masse an Blut im Teil des Körpers über dem Herzen ist also direkt proportional zu L^3.
(2) Wenn eine Giraffe $a$mal so groß wird, dann nimmt der Radius eines Aders mit einem Faktor a zu. Die Querfläche eines Aders ist also direkt proportional zu L^2.
(3) Da der Blutdruck eine Kraft pro Flächeninhalt ist, ist der Blutdruck direkt proportional zu L – das folgt aus (1) und (2).
(4) Wenn der Blutdruck eine bestimmte Grenze überschreitet, kann das Herz nicht mehr optimal funktionieren. Also gibt es für Giraffen eine deutliche Übergrenze.
(5) Da bei Giraffen der Anteil vom Körper, der über dem Herzen liegt, recht groß ist, erwartet man, dass sie am ehesten von diesem Blutdruckproblem betroffen sind.
Die Aufgabe lautet: (a) Kontrolliere die Begründungen bei (1), (2) und (3). (b) Suche im Internet die Daten zu Giraffen, und vergleiche sie mit den Daten der Elefanten, und kontrolliere, ob die Behauptung bei (5) stimmt.

Aufgabe X11. Eine recht bekannte Formel in der Physik ist die Formel von Coulomb, auch wohl, das Gesetz von Coulomb genannt. Dieses Gesetz beschreibt die elektrische Kraft zwischen zwei Ladungen. Betrachten wir folgende Lage: wir haben zwei Ladungen Q_1 und Q_2 auf einer Distanz r von einander. Wenn wir Q_1 a-mal so groß machen, dann erwarten wir, dass die elektrische Kraft zwischen beiden auch a-mal so groß wird. Ähnliches gilt für Q_2. Für die r-Abhängigkeit kann man sich folgendes überlegen: Die Kraft kann man sich als Kraftlinien vorstellen; dabei stellt die Dichte der Kraftlinien die Stärke der Kraft dar. Da sich die Kraftlinien um eine Ladung in allen Richtungen homogen (gleichmäßig) verteilen, nimmt die Dichte der Kraftlnien mit der Fläche des Kugels mit Radius r um eine Ladung ab. Daher nimmt die elektrische Kraft mit r^2 ab. Das Gesetz von Coulomb ist eine mathematische Formulierung der bisherigen Überlegungen. Deine Aufgabe ist es, die Abhängigkeiten (direkt und eine indirekte zum Quadrat) in eine Formel umzuwandeln. Die Konstante, die du dafür brauchst, darfst du mit f andeuten. Finde die Formel von Coulomb!

Aufgabe X12. Eine Ellipse ist etwas wie ein ausgedehnter Kreis. Wo ein Kreis unendlich viele Symmetrieachsen hat, hat eine Ellipse nur zwei. Diese beiden Symmetrieachsen nennt man auch wohl Achsen der Ellipse. Die Gleichung einer Ellipse, deren Achsen mit der x- und y-Achse zusammenfallen, ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Wenn zwei Punkte gegeben sind, kannst du a und b bestimmen – bis auf Vorzeichen, aber da du a und b immer positiv wählen darfst, ist das kein Problem. Stell dir vor, so eine Ellipse geht durch die Punkte (1|3) und (2|2). Finde dann a und b und zeichne die Ellipse. Wo schneidet sie die x- und y-Achsen?

Aufgabe X13. Es gibt einen einfachen Beweis, dass die Wurzel von 2 nicht eine Bruchzahl ist. Die benutzte Technik ist "Beweis aus dem Widerspruch". Allgemein geht die Technik wie folgt: Man nimmt etwas an, aber durch Argumentieren endet man bei einem Widerspruch. Wenn man dann richtig argumentiert hat, gibt es nur eine Möglichkeit: die Annahme war falsch. Diese Technik kann wie folgt verwendet werden: Nehmen wir an, $\sqrt{2}$ sei eine Bruchzahl. Dann gibt es also ganze Zahlen a und b, die keinen gemeinsamen Teiler haben, sodass $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Das mit den Teilern ist recht kritisch; wenn a und b einen gemeinsamen Teiler haben, kann man kürzen, und man kürzt so weit, bis es keinen gemeinsamen Teiler mehr gibt. Wenn wir also solche teilerfreien a und b mit $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ haben, dann folgt $a^2 = 2b^2$. Das bedeutet aber, dass a eine gerade Zahl sein muss, denn das Quadrat einer ungeraden Zahl ist wieder ungerade. Daher können wir schreiben $a = 2p$, mit p irgendeine ganze Zahl. Das setzen wir wieder ein, und nach wenigen Schritten Algebra landen wir bei $(2p)^2 = 2b^2$ also $2p^2 = b^2$. Aber dann muss b gerade sein. Also waren a und b doch beide durch zwei teilbar. Das ist ein Widerspruch mit der Annahme, es gäbe teilerfreie a und b mit $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Daher muss die Annahme falsch sein! Es kann also nicht teilerfreie a und b mit $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ geben. Daher ist die Wurzel von zwei keine Bruchzahl. Beweise jetzt du, dass die Wurzel von 3 keine Bruchzahl ist!

Aufgabe X14. Von einem Viereck $ABCD$ kann man die Diagonalen AC und BD ziehen. Diese schneiden sich im Punkt S. Der Punkt S liegt nicht immer im Viereck. Die Diagonalen halbieren sich auch nicht immer. (i) Finde ein Beispiel eines Vierecks, sodass S nicht im Viereck liegt. (Wenn es nach 10 Minuten noch immer nicht gelungen ist, suche dann im Internet das Wort "konvex".) (ii) Jetzt musst du eine Bedinungen finden, die garantiert, dass die Diagonalen sich halbieren. Wenn sie sich halbieren, dann ist S sowohl der Mittelpunkt von AC wie von BD. Wandle diese Bedingung um in $A+C = B+D$. Schließe daraus, dass $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. (iii) Welche Vierecke haben die Eigenschaft, dass sich die Diagonale eines Vierecks halbieren? (iv) Sie jetzt $ABCD$ ein beliebiges Viereck. Seien M, P, Q und R die Mittelpunkte der Kanten. Zeige, dass $MPQR$ ein Parallelogramm ist.