Aufgabe 1. Schreibe als einen Bruchterm und vereinfache so weit wie möglich

(a) $\dfrac{3}{4+X} + \dfrac{7}{X-4} = \dfrac{3X - 12 + 7X + 28}{X^2 - 4^2} = \dfrac{10X - 16}{X^2 - 16}$

(b) $\dfrac{Y+2}{3Y+9} - \dfrac{2Y}{Y+3} = \dfrac{Y+2}{3Y+9} - \dfrac{6Y}{3Y+9} = \dfrac{-7Y+2}{3Y+9}$

(c) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{Z}{Z^2-4} = \dfrac{Z^2 - 4 - 2Z}{2(Z^2-4)}$

Aufgabe 2.
Ergänze richtig!

(a) $(3X + 12)^2 = 9X^2 + 72X + 144$

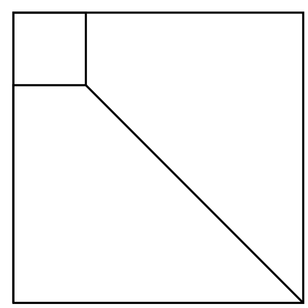
(b) $(X - 2Y(X + 2Y) = X^2 - 4Y^2$

(c) $(3Z + 3)(2Z + 5) = 6Z^2 + 21Z + 15$ (Mehrere Möglichkeiten!)

Aufgabe 3.
Benutze die rechtsstehende Figur, um die Formel

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

zu begründen!



Siehe Notizen; steht in deinem Heft.

Aufgabe 4.
Gegeben ist ein Kegel mit Grundfläche $G = 100\pi\ cm^2$. Die Erzeugende ist $s = 15cm$. Berechne das Volumen und die Mantelfläche des Kegels.

Aus $G = 100\pi$ folgt $r = 10cm$. Somit $M = \pi rs = 150\pi cm^2$. Auch $h^2 = 15^2 - 10^2 = 125$, somit hast du $h = 11,2cm$ und mit $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ hast du dann V.

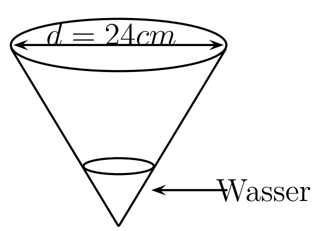
Aufgabe 5.
Aus einem Zylinder aus Holz mit Radius $r = 4cm$ und Höhe $h = 15cm$ werden so viel wie möglich Kugeln mit Radius $r = 4cm$ geschnitten. (i) Wie viele Kugeln können höchstens ausgeschnitten werden, und (ii) wie viel Prozent vom Holz wird nicht für die Kugeln verwendet?

Mit $r = 4$ ist der Durchmesser $8cm$. Somit passt nur eine Kugel. Nicht verwendet wird $V = \pi r^2 h - \frac{4}{3}\pi r^3 = 753,98 - 268,08 = 485,9cm^3$. Das ist ein Anteil von $\frac{485,9}{753,98} = 0,608$, also $60,8\%$.

Aufgabe 6.
(Siehe Figur hier unten.) Ein Rechteck mit Seiten $a = 5cm$ und $b = 10cm$ wird um die Symmetrieachse parallel zu a gedreht. So entsteht Zylinder Z_1. Wenn man dasselbe Rechteck mit um die Symmetrieachse parallel zu b dreht, entsteht Zylinder Z_2. Berechne das Verhältnis $V(Z_1) : V(Z_2)$ der Volumen der Zylinder.

$V_1 = 5^2 \cdot 5 \cdot \pi$, $V_2 = (2,5)^2 \cdot 10 \cdot \pi$, also $V_1 : V_2 = 5^2 \cdot 5 : (2,5)^2 \cdot 10 = 2^2 : 2 = 2 : 1$.

Aufgabe 7.
Ein (umgekehrter) Kegel mit Durchmesser $d = 24cm$ und Höhe $h = 20cm$ wird so mit Wasser gefüllt, dass die Höhe der Wassermasse $4cm$ beträgt. (Siehe auch Bild hier unten.) Wie viel Prozent des Volumens des Kegels wird vom Wasser eingenommen?



Das Wasser bildet einen Kegel mit Höhe $h_w = 4cm$. Den Radius dieses Kegels findet man mit dem Strahlensatz, also, mit dem Verhältnis $r : 4 = 12 : 20$, also $r = 12 : 5 = 2,4$. Also, $V_w = \pi(2,4)^2 \cdot 4$ und $V_K = \pi 20^2 \cdot 12$, sodass $V_w/V_K = 0,008$, also $0,8\%$. Kurzform: Die Höhe ist ein Fünftel, somit auch der Radius, das heißt $V_w = \frac{1}{5^3} \cdot V_K$, also ein Hundertfünfundzwanzigstel und $1/125 = 0,008$, also $0,8\%$.

Aufgabe 1.
Schreibe als einen Bruchterm und vereinfache so weit wie möglich

(a) $\dfrac{3}{5+X} + \dfrac{7}{X-5} = \dfrac{3X-15+7X-35}{X^2-25} = \dfrac{10X-20}{X^2-25}$

(b) $\dfrac{Y+2}{4Y+8} - \dfrac{2Y}{Y+2} = \dfrac{Y+2-8Y}{4Y+8} = \dfrac{-7Y+2}{4Y+8}$

(c) $1 - \dfrac{Z^2}{Z^2-1} = \dfrac{Z^2-1-Z^2}{Z^2-1} = \dfrac{-1}{Z^2-1}$

Aufgabe 2.
Ergänze richtig!

(a) $(2X+11)^2 = 4X^2 + 44X + 121$

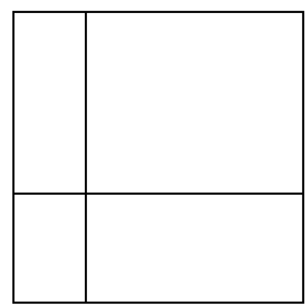
(b) $(2Y-3X)(2Y+3X) = 4Y - 9X^2$

(c) $(3Z+1)(2Z+1) = 6Z^2 + 5Z + 1$ (Mehrere Möglichkeiten!)

Aufgabe 3.
Benutze die rechtsstehende Figur, um die Formel

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

zu begründen!



Steht in deinen Notizen! Aber ich zeige es gerne noch einmal ...

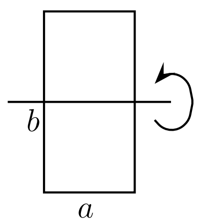
Aufgabe 4.
Gegeben ist ein Kegel mit Grundfläche $G = 25\pi\ cm^2$. Die Höhe ist $h = 8cm$. Berechne das Volumen und die Mantelfläche des Kegels.

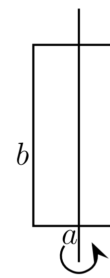
Aus $G = 25\pi^2$ folgt $r = 5cm$. Somit $s = \sqrt{8^2+5^2} \approx 9,4cm$. Somit $M = \pi r s \approx 47\pi\ cm^2$ und $V = \frac{1}{3}\pi 85^2 = \frac{200}{3}\pi cm^3$.

Aufgabe 5.
Aus einem Zylinder aus Holz mit Radius $r = 10cm$ und Höhe $h = 45cm$ werden so viel wie möglich Kugeln mit Radius $r = 10cm$ geschnitten. (i) Wie viele Kugeln können höchstens ausgeschnitten werden, und (ii) wie viel Prozent vom Holz wird nicht für die Kugeln verwendet?

Mit $r = 10cm$ ist der Durchmesser $20cm$, somit können 2 Kugeln aus dem Holz geschnitten werden. Somit wird nicht verwendet $\pi 10^2 \cdot 45 - 2 \cdot \frac{4}{3}\pi 10^3 \approx 14137 - 8376 = 5761cm^3$, und das ist ein Anteil von $\frac{5761}{14137} = 0,4075\ldots$, also etwa 41%.

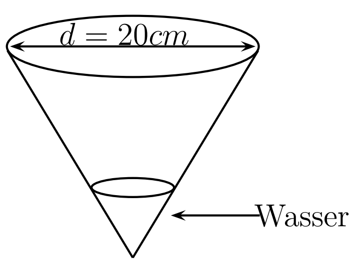
Aufgabe 6.
(Siehe Figur hier unten.) Ein Rechteck mit Seiten $a = 3cm$ und $b = 10cm$ wird um die Symmetrieachse parallel zu a gedreht. So entsteht Zylinder Z_1. Wenn man dasselbe Rechteck mit um die Symmetrieachse parallel zu b dreht, entsteht Zylinder Z_2. Berechne das Verhältnis $V(Z_1) : V(Z_2)$ der Volumen der Zylinder.





$V_1 : V_2 = \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot a : \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot b = b^2 a : a^2 b = b : a = 10 : 3.$

Aufgabe 7.
Ein (umgekehrter) Kegel mit Durchmesser $d = 20cm$ und Höhe $h = 30cm$ wird so mit Wasser gefüllt, dass die Höhe der Wassermasse $9cm$ beträgt. (Siehe auch Bild hier unten.) Wie viel Prozent des Volumens des Kegels wird vom Wasser eingenommen?



Der Radius des Wasserkegel folgt aus $r : 9 = 10 : 30$, also $r = 3cm$. Daher $V_w = \frac{\pi}{3} 3^2 \cdot 9$ und der Gesamtkegel $V_K = \frac{\pi}{3} 10^2 \cdot 30$, somit $V_w : V_K = 3^2 \cdot 9 : 10^2 \cdot 30 = 3^3 : 10^3 = 27 : 1000 = 0,027$, also 2,7%.