Aufgabe 1. (5 Punkte)
Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!

1. ☐	Der Ansatz von Laplace zu Wahrscheinlichkeiten beruht auf Erfahrung (Empirie).
2. ☒	Eine Wahrscheinlichkeit ist eine Zahl im Intervall $[0, 1]$.
3. ☐	Das Gesetz der großen Zahlen besagt, dass sich Wahrscheinlichkeiten auf Dauer $\frac{1}{2}$ annähern.
4. ☒	Das sichere Ereignis hat Wahrscheinlichkeit 1.
5. ☒	$P(A\|B) = P(A)$ bedeutet, dass A von B unabhängig ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Ordnen Sie jeweils das richtige Symbol zur passenden Beschreibung. Schreiben Sie a, b, c oder d hinter "Symbol:" bei der passenden Beschreibung.

(a) $P(A\|B)$	(b) $P(B\|A)$	(c) $P(A \cap B)$	(d) $P(A \cup B)$	Passt zu
Die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl A als B eintritt.				Symbol: c
Die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, gegeben dass A eingetreten ist.				Symbol: b
Die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, gegeben dass B eingetreten ist.				Symbol: a
Die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B eintritt.				Symbol: d

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Eine Schülerin würfelt zehnmal mit einem Würfel. Ihre Ergebnisse werden durch die folgende Menge wiedergegeben $\{2, 5, 3, 2, 2, 6, 1, 3, 5, 4\}$. Bestimmen Sie **(a)** Median, **(b)** Modus, **(c)** das arithmetische Mittel.

(a) Der Median ist 3.

(b) Der Modus ist 2.

(c) Das arithmetische Mittel ist 3,3.

Aufgabe 4. (6 Punkte)
In einer Urne sind 10 Kugeln, die die Nummern 1 bis 10 tragen. Eine Kugel wird blind gezogen. Es sei X die Nummer der gezogenen Kugel. Ermittle **(a)** $P(X > 4)$, **(b)** $P(X \text{durch 3 teilbar})$, **(c)** $P(|X - 8| \leq 1)$.

(a) $P(X > 4) = \frac{3}{5}$. (b) $P(X \text{durch 3 teilbar}) = \frac{3}{10}$. (c) $P(|X - 8| \leq 1) = \frac{3}{10}$.

Aufgabe 5. (3 x 3 Punkte)
Familie A (2 Erwachsene, 4 Kinder) und Familie B (2 Erwachsene, 2 Kinder) fahren für drei Tage gemeinsam in ein Ferienhaus auf Urlaub. Mit Los wird jeden Tag bestimmt, wer einen Tag lang den Küchendienst macht.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dreimal hintereinander jemand aus Familie A genommen wird, wenn dasselbe Familienmitglied mehrmals drankommen darf.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dreimal hintereinander jemand aus Familie A genommen wird, wenn dasselbe Familienmitglied nicht mehrmals drankommen darf.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Familie B öfter als Familie A genommen wird, wenn dasselbe Familienglied nicht mehrmals drankommen darf.

(a) $\left(\frac{6}{10}\right)^3$ (b) $\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$ (c) Das passiert, wenn die Familie B dreimal (BBB) oder zweimal (BBA, BAB, ABB) drankommt. Daher $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} + 3 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{3}$.

TEIL 2 – mit Vernetzung und Vertiefung GRUPPE A

Aufgabe 6. (3 x 3 Punkte)
Mit einer ehrlichen Spielwürfel wird dreimal geworfen. Die Ergebnisse werden in einer Liste $\{x_1, x_2, x_3\}$ notiert.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Modus 5 ist.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das arithmetische Mittel 5 ist.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $x_1 + x_2 = x_3$, wenn gegeben ist, dass $x_1 + x_2 + x_3 = 5$.

(a) Zwei Möglichkeiten: dreimal 5, zweimal 5. $P(555) = \frac{1}{6^3}$, $P(55X) = 3 \cdot \frac{1}{6^2} \frac{5}{6}$. Aufaddieren ergibt $\frac{1+15}{216} = \frac{2}{27}$.
Alternativ: alle Zahlen können Modus sein, also ein Sechstel. Nur muss man die Möglichkeit "alle unterschiedlich" wegnehmen. Das geht auf 6 mal 5 mal 4 Weisen, also 120 Weisen. Daher gibt es $216 - 120 = 96$ Weisen, wo es wirklich einen Modus gibt, davon gehen $96 : 6 = 16$ auf das Konto von 5. Daher $P(Modus = 5) = \frac{16}{216}$.
(b) Dann muss die Augensumme 15 sein. Dann gibt es: $15 = 6 + 6 + 3$, $15 = 6 + 5 + 4$ und $16 = 5 + 5 + 5$. Also $P = \frac{3+6+1}{216}$, denn $6 + 6 + 3$ geht 3mal, $6 + 5 + 4$ geht 6mal, $5 + 5 + 5$ geht einmal.
(c) Augensumme 5 geht wie folgt: $5 = 1 + 1 + 3$, $5 = 1 + 2 + 2$ und weiter nicht. Keine Möglichkeit liefert $x_1 + x_2 = x_3$, daher Null.

Aufgabe 7. (3 x 3 Punkte)

Nach statistischen Untersuchungen hat sich herausgestellt, dass an der High Tech University of Mathcity die Prüfung im Fach Stochastik von 95% der Personen, die den Stoff beherrschen, bestanden wird. Andererseits haben die Personen, die den Stoff nicht beherrschen, eine Wahrscheinlichkeit von 5%, diese Prüfung zu bestehen. Aus denselben Untersuchungen geht hervor, dass jedes Jahr etwa 70% der Studenten den Stoff gut beherrscht.

(a) Der Student Tommy hat die Prüfung im Fach Stochastik bestanden. Berechnen Sie, wie wahrscheinlich es ist, dass Tommy den Stoff beherrscht.

(b) Der Student Timmy hat die Prüfung im Fach Stochastik nicht bestanden. Er behauptet aber, dass das wegen Stress passiert ist, und dass er den Stoff doch beherrscht. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit welcher er recht hat.

(c) Der Professor, der für die Prüfung im Fach Stochastik zuständig ist, überlegt sich, die Prüfung ein wenig zu ändern. Er will ein Paar Fragen mehr in die Prüfung aufnehmen. Dadurch sinkt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, die den Stoff nicht beherrscht, die Prüfung doch besteht, auf weniger als 1%. Aber auch die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der den Stoff beherrscht, die Prüfung besteht, geht auf 90% zurück. Bestimmen Sie, wie sich diese Maßnahme auf die Wahrscheinlichkeit auswirkt, dass jemand, der die Prüfung bestanden hat, den Stoff beherrscht.

Sei A das Ereignis: S kennt den Stoff. $P(A) = 0,7$. Sei B das Ereignis: S besteht den Test. $P(B|A) = 0,95$ und $P(B|\neg A) = 0,05$. Daher $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\neg A)P(\neg A) = 0,95 \cdot 0,7 + 0,05 \cdot 0,3 = 0,68$. Daher $P(\neg B) = 0,32$

(a) Mit Baumdiagramm oder Bayes $P(A|B) = \frac{A \cap B}{P(B)} = \frac{0,95 \cdot 0,7}{0,68} \approx 0,9779$.

(b) Mit Baumdiagramm oder Bayes $P(A|\neg B) = \frac{P(A \cap \neg B)}{P(\neg B)} = \frac{0,7 \cdot 0,05}{0,32} \approx 10,94\%$.

(c) Dieselben Berechnungen nochmal, nur mir $P(B|\neg A) = 0,01$ oder kleiner und $P(B|A) = 0,9$, also $P(B) = 0,9 \cdot 0,7 + 0,01 \cdot 0,3 = 0,633$, oder kleiner, aber grö—sser also $0,9 \cdot 0,7 = 0,63$. Daher: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ liegt dann zwischen $\frac{0,9 \cdot 0,7}{0,633} \approx 0,995$ und $\frac{0,9 \cdot 0,7}{0,633} = 1$ also wird höher.

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!

1. ☐	Das Gesetz der großen Zahlen besagt, dass sich Wahrscheinlichkeiten auf Dauer annähern.
2. ☐	$P(A\|B) < P(A)$ bedeutet, dass A von B unabhängig ist.
3. ☒	Das sichere Ereignis hat Wahrscheinlichkeit 1.
4. ☐	Der Ansatz von Laplace zu Wahrscheinlichkeiten beruht auf Erfahrung (Empirie).
5. ☐	Eine Wahrscheinlichkeit ist eine Zahl, die größer als Null ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Ordnen Sie jeweils das richtige Symbol zur passenden Beschreibung. Schreiben Sie a, b, c oder d hinter "Symbol:" bei der passenden Beschreibung.

(a) $P(A\|B)$	(b) $P(B\|A)$	(c) $P(A \cap B)$	(d) $P(A \cup B)$	Passt zu
Die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, gegeben dass A eingetreten ist.				Symbol: b
Die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B eintritt.				Symbol: d
Die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, gegeben dass B eingetreten ist.				Symbol: a
Die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl A als B eintritt.				Symbol: c

Aufgabe 3. (6 Punkte)

Eine Schülerin würfelt zehnmal mit einem Würfel. Ihre Ergebnisse werden durch die folgende Menge wiedergegeben $\{3, 5, 2, 3, 3, 1, 6, 2, 4, 5\}$. Bestimmen Sie **(a)** Median, **(b)** Modus, **(c)** das arithmetische Mittel.

(a) Der Median ist 3.

(b) Der Modus ist 3.

(c) Das arithmetische Mittel ist 3,4.

Aufgabe 4. (6 Punkte)
In einer Urne sind 10 Kugeln, die die Nummern 1 bis 10 tragen. Eine Kugel wird blind gezogen. Es sei X die Nummer der gezogenen Kugel. Ermittle **(a)** $P(X > 7)$, **(b)** $P(X \text{durch 4 teilbar})$, **(c)** $P(|X-4| \leq 2)$.

(a) $P(X > 7) = \frac{3}{10}$. (b) $P(X \text{durch 4 teilbar}) = \frac{2}{10}$. (c) $P(|X-4| \leq 2) = \frac{6}{10}$.

Aufgabe 5. (3 x 3 Punkte)
Familie A (2 Erwachsene, 3 Kinder) und Familie B (2 Erwachsene, 4 Kinder) fahren für drei Tage gemeinsam in ein Ferienhaus auf Urlaub. Mit Los wird jeden Tag bestimmt, wer einen Tag lang den Küchendienst macht.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dreimal hintereinander jemand aus Familie A genommen wird, wenn dasselbe Familienmitglied mehrmals drankommen darf.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dreimal hintereinander jemand aus Familie A genommen wird, wenn dasselbe Familienmitglied nicht mehrmals drankommen darf.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Familie B öfter als Familie A genommen wird, wenn dasselbe Familienglied nicht mehrmals drankommen darf.

(a) $\left(\frac{5}{11}\right)^3$. (b) $\frac{5\cdot4\cdot3}{11\cdot10\cdot9} = \frac{2}{33}$, (c) Entweder zweimal B, oder dreimal B, daher $\frac{6\cdot5\cdot4}{11\cdot10\cdot9} + 3\cdot\frac{6\cdot5\cdot5}{11\cdot10\cdot9} = \frac{19}{33}$.

TEIL 2 – mit Vernetzung und Vertiefung — GRUPPE B

Aufgabe 6. (3 x 3 Punkte)
Mit einer ehrlichen Spielwürfel wird dreimal geworfen. Die Ergebnisse werden in einer Liste $\{x_1, x_2, x_3\}$ notiert.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das arithmetische Mittel 3 ist.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Modus 3 ist.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $x_1 + x_2 = x_3$, wenn gegeben ist, dass $x_1 + x_2 + x_3 = 4$.

(a) Augensumme = 9. (331) dreimal, (234) 6mal, (225) 3mal, (126) 6mal, (135) 6mal, (144) 3mal. Daher $P = \frac{25}{216}$.
(b) $P(333) = \frac{1}{6^3}$, $P(33X) = 3\cdot\frac{1}{6^2}\frac{5}{6}$. Aufaddieren ergibt $\frac{1+15}{216} = \frac{2}{27}$.
Alternativ: alle Zahlen können Modus sein, also ein Sechstel. Nur muss man die Möglichkeit "alle unterschiedlich" wegnehmen. Das geht auf 6 mal 5 mal 4 Weisen, also 120 Weisen. Daher gibt es $216 - 120 = 96$ Weisen, wo es wirklich einen Modus gibt, davon gehen $96 : 6 = 16$ auf das Konto von 3. Daher $P(Modus = 3) = \frac{16}{216}$.
(c) Augensumme 4 geht wie folgt $4 = 1 + 1 + 2$, das geht auf drei Weisen (112), (121) und (211); Lösung bei $x_1 = x_2 = 1$ und $x_3 = 2$. Daher $\frac{1}{3}$.

Aufgabe 7. (3 x 3 Punkte)

Nach statistischen Untersuchungen hat sich herausgestellt, dass an der High Tech University of Mathcity die Prüfung im Fach Stochastik von 90% der Personen, die den Stoff beherrschen, bestanden wird. Andererseits haben die Personen, die den Stoff nicht beherrschen, eine Wahrscheinlichkeit von 2%, diese Prüfung zu bestehen. Aus denselben Untersuchungen geht hervor, dass jedes Jahr etwa 75% der Studenten den Stoff gut beherrscht.

(a) Der Student Tommy hat die Prüfung im Fach Stochastik bestanden. Berechnen Sie, wie wahrscheinlich es ist, dass Tommy den Stoff beherrscht.

(b) Der Student Timmy hat die Prüfung im Fach Stochastik nicht bestanden. Er behauptet aber, dass das wegen Stress passiert ist, und dass er den Stoff doch beherrscht. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit welcher er recht hat.

(c) Der Professor, der für die Prüfung im Fach Stochastik zuständig ist, überlegt sich, die Prüfung ein wenig zu ändern. Er will ein Paar Fragen in die Prüfung leichter machen. Dadurch steigt zwar die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, die den Stoff nicht beherrscht, die Prüfung doch besteht, auf etwa 5%. Aber auch die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der den Stoff beherrscht, die Prüfung besteht, steigt auf 95%. Bestimmen Sie, wie sich diese Maßnahme auf die Wahrscheinlichkeit auswirkt, dass jemand, der die Prüfung bestanden hat, den Stoff beherrscht.

Sei A das Ereignis: S kennt den Stoff. $P(A) = 0,75$. Sei B das Ereignis: S besteht den Test. $P(B|A) = 0,9$ und $P(B|\neg A) = 0,02$. Daher $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\neg A)P(\neg A) = 0,9 \cdot 0,75 + 0,02 \cdot 0,25 = 0,68$. Daher $P(\neg B) = 0,364$

(a) Mit Baumdiagramm oder Bayes $P(A|B) = \frac{A \cap B}{P(B)} = \frac{0,9 \cdot 0,75}{0,68} \approx 99,26\%$.

(b) Mit Baumdiagramm oder Bayes $P(A|\neg B) = \frac{P(A \cap \neg B)}{P(\neg B)} = \frac{0,75 \cdot 0,10}{0,32} \approx 23,44\%$.

(c) Dieselben Berechnungen nochmal, nur mir $P(B|\neg A) = 0,05$ oder kleiner und $P(B|A) = 0,95$, also $P(B) = 0,95 \cdot 0,75 + 0,05 \cdot 0,25 = 0,725$. Daher:

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ist dann $\frac{0,95 \cdot 0,75}{0,725} \approx 0,9828$ also wird niedriger, vielleicht keine gute Idee.