Wiederholung der zweiten Schularbeit Mathematik Klasse 6A
Jänner 2015

SCHÜLERNAME:

Gruppe A = B

Lehrer: Dr. D. B. Westra

Grundkompetenzen – Grundwissen – Grundfertigkeiten 32 Punkte
mit Vernetzung und Vertiefung 16 Punkte

Punkteanzahl : von 48 Punkten

NOTE:

NOTENSCHLÜSSEL	
44 - 48 Punkte	Sehr Gut (1)
38-43 Punkte	Gut (2)
31-37 Punkte	Befriedigend (3)
24-30 Punkte	Genügend (4)
0-23 Punkte	Nicht genügend (5)

VIEL ERFOLG! BONNE CHANCE! GOOD LUCK! BUEN ÉXITO! BUONA FORTUNA!

TEIL 1 – Grundkompetenzen – Basiswissen GRUPPE A=B

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!

1. ☐	Für alle positive a gilt $a^0 = 0$.
2. ☒	Falls $p > q$ und $a > 1$ gilt $a^p > a^q$.
3. ☐	10^{15} ist das Dreifache von 10^{12}.
4. ☒	Der Logarithmus ${}^g\log(x)$ ist nur für positive x definiert.
5. ☒	Der Logarithmus ${}^g\log(x)$ hat genau eine Nullstelle.
6. ☐	$a^{\sqrt{2}}$ ist die Wurzel von a^2.

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Betrachten Sie folgende Termausdrücke. Ordnen Sie die vier Ausdrücke aus der linken Spalten jeweils den ihnen gleichen Ausdrücken in der rechten Spalte zu. Schreiben Sie A, B, C oder D hinter dem richtigen Ausdruck.

Terme Links	
$\left(\frac{x^{1,5}}{y^{0,5}}\right)^2 (xy)^{0,7}$	A
$xy\frac{xy^{0,8}}{x^{-0,7}y}$	B
$\sqrt{y^3x^3}\,\sqrt[10]{x^9}$	C
$\left(\frac{x^{0,4}}{y^{0,2}}\right)^8 \cdot y^{0,6}$	D

Terme Rechts	
$x^{2,7}y^{0,8}$	B
$x^{2,2}\frac{x}{y}$	D
$x^{1,2}y^{0,8}$	
$\left(x^{0,8}y^{0,5}\right)^3$	C
$\left(x^{0,8}y^{1,5}\right)^3$	
$x^{3,7}y^{-0,3}$	A

Aufgabe 3. (2x4 Punkte)
Angenommen, die Inflation (= mittlere Steigung der Preise) beträgt 1% jährlich, berechnen Sie (a) um wie viel Prozent sich die Preise in 20 Jahren erhöhen, und (b) wie viele Jahre es dauert, bevor sich die Preise um 30% gestiegen sind.

(a) In 20 Jahren erhöhen sich die Preise um 22 Prozent.

(b) In 26,37 Jahren habe die Preise sich um 30% erhöht.
Denn $(1,01)^{20} = 1,22\ldots$. Und $(1,01)^x = 1,3$ wird durch $x = \frac{{}^{10}\log(1,3)}{{}^{10}\log(1,01)}$ gelöst.

Aufgabe 4. (6 Punkte)
Kreuzen Sie die richtigen Formeln an! (Es gelten $a, b > 0$, $g > 1$, $r, s \in \mathbb{R}$.)

1. ☒	$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$.
2. ☐	${}^g\log(x) = \dfrac{{}^{10}\log(g)}{{}^{10}\log(x)}$.
3. ☐	${}^g\log(a+b) = {}^g\log(a) + {}^g\log(b)$.
4. ☒	${}^g\log(a^r) = r \cdot {}^g\log(a)$.
5. ☐	$\sqrt[m]{a^n} = a^{n-m}$.

Aufgabe 5. (6 Punkte)
Lösen Sie die Ungleichungen (a) $|4x - 3| \leq 2$ und (b) $-1 < 5x - 7 < 2$.

Die Lösungen der Ungleichung:

(a) x liegt im Intervall $[\frac{1}{4}, \frac{5}{4}]$, denn $-2 \leq 4x - 3 \leq 2$ ergibt $1 \leq 4x \leq 5$.

(b) x liegt im Intervall $[1,2; 1,8]$, denn 7 Addieren ergibt $6 < 5x < 9$, also $\frac{6}{5} < x < \frac{9}{5}$.

TEIL 2 – mit Vernetzung und Vertiefung $A = B$

Aufgabe 6. (2 x 3 Punkte)
Ein Mol ist eine Stoffmenge, und zwar bedeutet ein Mol eine Menge von $6,02 \cdot 10^{23}$ Molekülen. Ein Mol Wasser wiegt 18 Gramm. In Meereswasser befindet sich etwa 150 ppm 'Schweres Wasser', eine radioaktive Variante von Wasser. 150 ppm bedeutet 150 Stück pro Million. Also auf einer Million Wassermolekülen befinden sich etwa 150 'Schwere Wassermoleküle'. Ein Liter Wasser hat eine Masse von 1 kg.

(a) Berechnen Sie, wie viele Wassermoleküle sich in einem Liter befinden.
In einem Liter befinden sich $\frac{1000}{18} \approx 55,6$ Mol. Dieses Ergebnis mit $6,02 \cdot 10^{23}$ Multiplizieren ergibt $3,34 \cdot 10^{25}$ Moleküle.
(b) Gehen Sie davon aus, dass 'Schwere Wassermoleküle' etwa genau so viel Masse wie 'normale Wassermoleküle' haben, und berechnen Sie, wie viel mg 'Schweres Wasser' in einem Liter enthalten ist.
Wenn sie gleich viel Masse haben, ist es recht einfach: 150 auf einer Million sind 'schwer'. Also, ein Anteil von $\frac{150}{1000000}$ ist 'schwer'. Ein $\frac{150}{1000000}$ Anteil von 1 kg = 1000000 mg beträgt 150 mg, also 150 Milligramm ist die Antwort.

Aufgabe 7. (2x2 Punkte)
Betrachten Sie den folgenden Term: $T(x) = 2,5 \cdot 10^4 \cdot 10^{1,5x}$.

(a) Zeigen Sie, dass das Verhältnis $\dfrac{T(x+1)}{T(x)}$ von x unabhängig ist, und berechnen Sie dieses Verhältnis.

$$\frac{T(x+1)}{T(x)} = \frac{2,5 \cdot 10^4 \cdot 10^{1,5(x+1)}}{2,5 \cdot 10^4 \cdot 10^{1,5x}} = \frac{10^{1,5(x+1)}}{10^{1,5x}} = 10^{1,5x+1,5-1,5x} = 10^{1,5}$$

und $10^{1,5} = 10\sqrt{10} \approx 31,6$.
(b) Berechnen Sie $a - b$, wenn gegeben ist, dass $T(a) = 2T(b)$.
Wie aus (a) ersichtlich, ergibt sich $\frac{T(a)}{T(b)} = 10^{1,5(a-b)}$, dies muss 2 sein, also $10^{1,5(a-b)} = 2$, und somit $1,5(a-b) = {}^{10}\log(2) \approx 0,3$, daraus ergibt sich $a - b = 0,2$.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Lösen Sie die Ungleichung $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} > \dfrac{1}{3}$.

Die Nenner sind Null bei $x = \pm 1$. Dies notiert man auf einem Zahlenstrahl. Danach sucht man die Lösungen der Gleichung, also $>$ durch $=$ ersetzen und lösen: Ausmultiplizieren ergibt

$$\frac{x+1}{x^2-1} - \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{3}$$

und wenn man diese letzte Gleichung ausmultipliziert, bekommt man $x^2 - 1 = 6$, also $x = \pm\sqrt{7}$.
Somit sind folgende Intervalle wichtig:
$(-\infty, -\sqrt{7})$, $(-\sqrt{7}, -1)$, $(-1, +1)$, $(1, \sqrt{7})$ und $(\sqrt{7}, \infty)$.
Mit Probezahlen ausprobieren ergibt, dass die Lösungsmenge die Vereinigung $(-\sqrt{7}, -1) \cup (1, \sqrt{7})$ ist.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Aus physikalischen Gründen ist bekannt, dass der durchschnittliche Herzrythmus einer Tierart von der durchschnittichen Masse (M in Kilogramm) der Tierart abhängen muss, und zwar auf folgende Weise:

$$f = a \cdot M^b \tag{1}$$

wobei
f: ist die Herzfrequenz in Schläge pro Minute.
a: ist eine (jetzt noch) unbekannte Zahl.
M: die Masse in Kilogramm.
b: eine (jetzt noch) unbekannte Zahl.

Um jetzt a und b zu bestimmen, definiert man $y = {}^{10}\log(f)$ und $x = {}^{10}\log(M)$, denn aus Gleichung (**??**) folgt

$$^{10}\log(f) = {}^{10}\log(a) + b \cdot {}^{10}\log(M) \tag{2}$$

was eine lineare Gleichung in x und y ist. Trägt man jetzt die Punkte $(x|y)$ für viele Tierarten in ein Diagramm ein, so werden die Punkte etwa auf einer Geraden liegen. Im unterstehenden Diagramm sehen Sie das Ergebnis einer Untersuchung von Biologen, wobei die (best passende) Gerade schon eingezeichnet wurde.

Bestimmen Sie den Parameter b! Die Gleichung hier oben liest sich als $y = {}^{10}\log(a) + bx$, also b ist die Steigung. Bei $x = 0$ gilt $y = 1,2$ und bei $x = 0,7$ gilt $y = 1,4$, also ist die Steigung $b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,2}{0,7} = \frac{2}{7} \approx 0,29$.