Prüfungssituation

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

jede Aufgabe 5%

Aufgabe 1

Vereinfache $\dfrac{a^{0,2} \cdot (a^{0,4} \cdot b^{1,3})^2}{ab}$

$b^{1,6}$

Aufgabe 2

Erläutere, wie $a^{\sqrt{3}}$ definiert ist.

Man nähert $\sqrt{3}$ mit einer Reihe von Bruchzahlen q_1, q_2, q_3, … an, dann betrachtet man, wohin sich a^{q_1}, a^{q_2}, a^{q_3}, … bewegt. Zum Beispiel für $\sqrt{3}$, nimmt man eine immer bessere Annäherung $1,7$; $1,73$; $1,732$; und so weiter, dann betrachtet man $a^{1,7} = \sqrt[10]{a^{17}}$, $a^{1,73} = \sqrt[100]{a^{173}}$, $a^{1,732} = \sqrt[1000]{a^{1732}}$, …

Aufgabe 3

Entscheide, ob im Allgemeinen für $a, b > 0$ gilt, dass (a) $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$, oder (b) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, oder (c) $\sqrt{a+b} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(a) stimmt. Beweis mit einem rechtwinkligen Dreieck $\sqrt{x^2+y^2} < x + y$, setze dann $x = \sqrt{a}$, was geht, denn $a > 0$.

Aufgabe 4

Bestimme die Anzahl von Nullen in der (Dezimaldarstellung von) $\sqrt{10^{32}}$.

16

Aufgabe 5

Bestimme a in $\sqrt[5]{\dfrac{x^2 \cdot x^5}{x^3}} = \sqrt[10]{x^a}$.

$\sqrt[5]{\frac{x^2 \cdot x^5}{x^3}} = \sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}} = x^{0,8}$ also $a = 8$.

Aufgabe 6

Erläutere, wie a^{-z} für $z \in \mathbb{N}$ definiert ist.

$a^{-z} = \frac{1}{a^z}$

Aufgabe 7

Bestimme die reellen Zahlen x, für welche gilt $x^r > x^{r+1}$ für alle $r \in \mathbb{N}$.

(Ausführlich!) Umschreiben: $x^r(1-x) > 0$. Also wichtige Punkte sind $x = 0$ und $x = 1$. Wenn $x < 0$, dann ist $x^r > 0$ für r gerade und $x^r < 0$ für r ungerade, also muss $x \geq 0$. Wenn $x = 0$ gilt Gleichheit. Wenn $0 < x < 1$, ist $x^r > 0$ und $1 - x > 0$. Wenn $x = 1$ gilt Gleichheit. Wenn $x > 1$ gilt $x^r > 0$ aber $1 - x < 0$. Daher es muss $0 < x < 1$ gelten, damit $x^r > x^{r+1}$.

Aufgabe 8

Löse $\sqrt{a+2} + 10 = \sqrt{2a+1}$.

Quadrieren ergibt $a + 102 + 20\sqrt{a+2} = 2a + 1$, also $20\sqrt{a+2} = a - 101$. Nochmal Quadrieren: $400a + 800 = a^2 - 202a + 101^2$, also $a^2 - 602a + 101^2 - 800 = 0$. Dann Lösungsformel für quadratische Gleichungen benutzen. Diskriminante $D = 362404 - 150416 > 0$, also zwei Lösungen $a \approx 301 \pm 230,2$.

Aufgabe 9

Löse $\dfrac{\sqrt{a+5}}{\sqrt{3a+1}} = 2$.

Quadrieren ergibt $a + 5 = (3a+1)4$ also $a + 5 = 12a + 4$, also $11a = 1$, somit $a = \frac{1}{11}$.

Aufgabe 10

Schreibe als Bruchterm ohne Wurzel im Nenner $\dfrac{\sqrt{8}+4}{\sqrt{12}+\sqrt{5}}$.

$$\frac{\sqrt{8}+4}{\sqrt{12}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{8}+4)(\sqrt{12}-\sqrt{5})}{12-5} = \frac{(\sqrt{8}+4)(\sqrt{12}-\sqrt{5})}{7}$$

Aufgabe 11

Bestimme ${}^{a}\log(a^5 \cdot a^6)$.

11

Aufgabe 12

Bestimme ${}^{a^2}\log(a^{123})$.

Die Hälfte von 123, also 61,5.

Aufgabe 13

Bestimme s in ${}^{a}\log(\sqrt{a^5}) = {}^{b}\log(b^{2s-1})$.

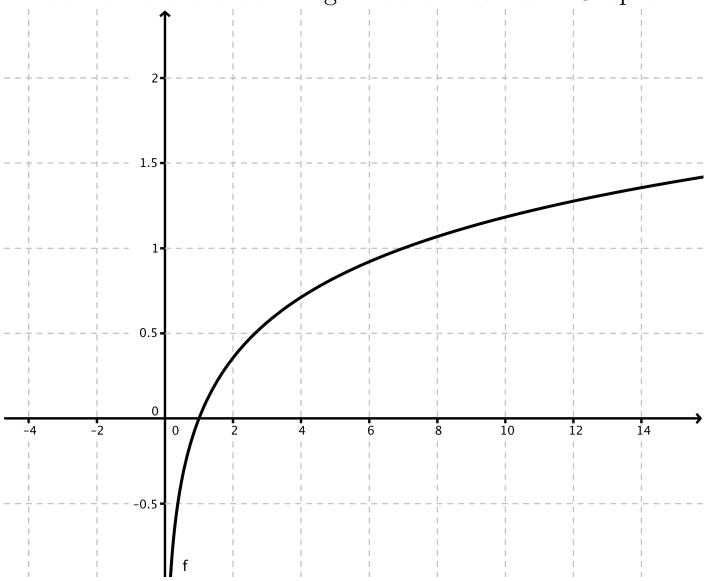
LHS $= \frac{5}{2}$ und RHS $= 2s - 1$, also $s = \frac{7}{4}$.

Aufgabe 14

Drücke t in ${}^{a}\log(a \cdot t) = 7$ in a aus.
$a \cdot t = a^7$ also $t = a^6$.

Aufgabe 15

In der unterstehenden Figur siehst du den Graphen von ${}^{m}\log(x)$. Entscheide, was m ist!



Man sieht dass bei $y = 1$ gilt, dass $x = 7$, also $m = 7$.

Aufgabe 16

Löse nach a: ${}^{2}\log(4^a) = 10$.
$4^a = 2^{10} = 4^5$, also $a = 5$.

Aufgabe 17

Drücke ${}^{3}\log(x)$ in ${}^{10}\log(x)$ und ${}^{10}\log(3)$ aus.
${}^{3}\log(x) = \frac{{}^{10}\log(x)}{{}^{10}\log(3)}$

Aufgabe 18

Für welche x gilt ${}^{5}\log(x) > 0$?
$x > 1$

Aufgabe 19

Finde m in ${}^{m}\log(100) = 3$ (Hinweis: Schreibe in Potenzform $a^b = c$).
Also $m^3 = 100$, also $m = \sqrt[3]{100}$.

Aufgabe 20

Schreibe ohne Wurzel im Nenner $\dfrac{3}{\sqrt{3u}-\sqrt{2v}}$.

$$\frac{3}{\sqrt{3u}-\sqrt{2v}} = \frac{3(\sqrt{3u}+\sqrt{2v})}{3u-2v}$$

Aufgabe 21

Schreibe mit Wurzeln und Potenzen, die natürlichen Zahlen sind $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{2,2} \cdot (c^3)^{1,2}}{(abc)^{2,1}}$

$a^{1,5-2,1} b^{2,2-2,1} c^{3,6-2,1} = \sqrt[10]{\frac{bc^{15}}{a^6}}$

Aufgabe 22

Löse nach x: $\dfrac{x^4+10}{x^4+3} > 2$.

Ausmultiplizieren $x^4 + 10 > 2x^4 + 6$, also $4 > x^4$, also $x^2 < 2$. Also $x \in (-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$.

Aufgabe 23

Die Weltbevölkerung wächst jedes Jahr um 3%. Wie lange dauert es, bevor sie sich verdoppelt?

$(1,03)^x = 2$, also $x = {}^{1,03}\log(2) = \frac{{}^{10}\log(2)}{{}^{10}\log(1,03)}$. Das sind etwa 23,45 Jahre.

Aufgabe 24

Wie hoch sollte die Inflation jährlich sein, damit sich die Preise in 15 Jahren verdoppeln?

$a^{15} = 2$, also $a = \sqrt[10]{2} \approx 1,07$ also 7%.

Aufgabe 25

Löse nach x: $2^x = 10$.

$x = {}^{2}\log(10) \approx 3,32$

Aufgabe 26

Welche Beziehung gibt es zwischen ${}^{3}\log(x)$ und ${}^{3}\log\left(\dfrac{1}{x}\right)$?

${}^{3}\log(x) = -{}^{3}\log\left(\frac{1}{x}\right)$

Aufgabe 27

Eine Bakterienkolonie vermehrt sich so, dass sich die Population jede 20 Minuten verdoppelt. Berechne, wie lange es dauert, bevor die Population sich verhundertfacht.

$2^t = 100$, also $t = {}^{2}\log(100)$, was die Anzahl von 20-Minuten-Phasen ergibt. Dann noch durch drei Dividieren ergibt die Anzahl von Stunden.

Aufgabe 28

Wenn in ein Kubikmeter Luft etwa 10^{10} Bakterien vorhanden sind, wie viele sind dann etwa in $1cm^3$ vorhanden?

Ein cm^3 passt 10^6-mal in einen m^3, also Antwort ist 10^4.

Aufgabe 29

Für welche Zahlen gilt $a^0 = 1$? Für welche Zahlen gilt $a^1 = 0$?

$a^0 = 1$ für alle reellen Zahlen $a \neq 0$, und $a^1 = 0$ nur dann wenn $a = 0$.