Prüfungssituation Mai – Lösungen

Hoffentlich ohne Fehler

pro Aufgabe 6%, 8% oder 10%

6%-Aufgabe 1

Löse die Gleichung $\frac{3X+1}{2X-3} = -5$.

$X = \frac{14}{13}$

10%-Aufgabe 2

Gegeben ist $\vec{v} = (3|1)$, $\vec{u} = (1|-2)$ und $\vec{w} = (4|3)$. Finde reelle Zahlen s und t, sodass $\vec{v} = s\vec{u} + t\vec{w}$.

In Komponenten $3 = s + 4t$ und $1 = -2s + 3t$. Das ist ein System mit zwei Gleichungen: $s = \frac{5}{11}$ und $t = \frac{7}{11}$.

6%-Aufgabe 3

Bestimme den Winkel $\angle BAC$ wenn $A = (1|0|7)$, $B = (0|1|7)$ und $C = (7|0|1)$.

$\vec{a} = B - A = (-1|1|0)$ und $\vec{b} = C - A = (6|0|-6)$, dann $\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|} = -0,5$, also $\alpha = 120^o$.

8%-Aufgabe 4

Löse die Gleichung $4\sin(5x) = -2$.

$\sin(5x) = -0,5$ also $5x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ oder $5x = -\frac{1}{6}\pi + 2k\pi$, dann folgt $x = -\frac{1}{6}\pi + k\frac{2\pi}{5}$ oder $5x = -\frac{1}{30}\pi + \frac{2k\pi}{5}$ wobei jeweils $k \in \mathbb{Z}$.

8%-Aufgabe 5

Für welchen t steht der Vektor $(2|0) + (-2|1)t$ normal auf $(3|1)$?

Skalarprodukt $0 = (2 - 2t|t) \cdot (3|1) = 6 - 6t + t$ also $t = \frac{6}{5}$

8%-Aufgabe 6

Der Punkt $(8|5|z)$ liegt auf Distanz 15 vom Ursprung. Bestimme z (NB es gibt zwei Lösungen, ich will nur eine).

Distanz zum Ursprung $8^2 + 5^2 + z^2 = 225$ also $z^2 = 136$ und somit $z = \pm\sqrt{136}$.

8%-Aufgabe 7

Bestimme die reelle Zahl $x > 0$ so, dass der Winkel $\angle BAC$ ein rechter Winkel ist, wenn $A = x \cdot (1|1|1)$, $B = (4|0|0)$ und $C = (0|0|2)$.

$B-A = (4-x|-x|-x)$ und $C-A = (-x|-x|2-x)$ und ihr Skalarprodukt ist $(4-x)\cdot -x + x^2 - x\cdot(2-x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ und das ist Null, wenn $x = 0$ oder $x = 2$. Gefragt ist somit $x = 2$.

8%-Aufgabe 8

Löse die Gleichung $10^{3x} = 75 \cdot 10^{1,5\cdot x}$.

Dividiere durch $10^{1,5x}$ und bekomme $10^{1,5x} = 75$, also $x = \frac{{}^{10}\log(75)}{1,5} = \ldots$ (TR)

8%-Aufgabe 9

Finde eine reelle Zahl s, sodass $(3|s)$ auf der Geraden durch $(6|7)$ und $(26|19)$ liegt.

Vorschlag $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{19-7}{26-6} = 0,6$. Somit muss s um $3k = 1,8$ niedriger als 7 sein, also $s = 5,2$.

8%-Aufgabe 10

Gib eine Normalvektorform für die Gerade durch $(-2|7)$ und $(7|3)$.

$\vec{g} = (9|-4)$ also ein Normalvektor ist $(4|9)$ und somit $4x + 9y = c$ und c finden wir durch irgendeinen Punkt einzusetzen, und sowohl $4 \cdot -2 + 9 \cdot 7$ und $4 \cdot 7 + 9 \cdot 3$ ergeben 55, also $4x + 9y = 55$. Ich fand $(1|5\frac{1}{4}|\frac{3}{4})$ und $(-1|4\frac{1}{2}|-\frac{1}{2})$.

8%-Aufgabe 11

Finden einen Normalvektor für die Ebene durch $A = (1|2|3)$, $B = (3|3|3)$ und $C = (0|7|0)$.

$B - A = (2|1|0)$ und $C - A = (-1|5|3)$, ihr Vektorprodukt ist $(-3|6|11)$.

8%-Aufgabe 12

Berechne $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ für $f(x) = 4 \cdot e^{-0,6\cdot x}$.

$\frac{4e^{-0,6\cdot(x+1)}}{4e^{-0,6\cdot x}} = \frac{e^{-0,6\cdot x-0,6)}}{e^{-0,6\cdot x}} = \frac{e^{-0,6\cdot x-0,6)}}{e^{-0,6\cdot x}} = e^{-0,6}$.

6%-Aufgabe 13

Finde eine reelle Zahl c, sodass $(7|3|c)$ in der Ebene $E:\ 5x - 2y + 6z = 100$ liegt.

$35 - 6 + 6c = 100$ ergibt $c = \frac{71}{6} = 11\frac{5}{6}$.

10%-Aufgabe 14

Finde zwei unterschiedliche Punkte in $E \cap F$, wobei $E:\ 3x + 2y - 6z = 9$ und $F:\ -x + y + z = 5$.

Vorschlag: (P1) Nimm $x = 1$ und löse die zwei Gleichungen $2y - 6z = 6$ und $y + z = 6$; (P2) nimm dann $x = 3$ und löse die Gleichungen $2y - 6z = 0$ und $y + z = 14$. Also, einfach für x (y oder z würde auch gehen) etwas wählen und löse dann die Gleichungen für E und F. Funktioniert nur nicht, wenn $E \cap F$ normal auf x-Achse steht, dann also y oder z einsetzen – zuerst mal probieren mit x, geht das nicht, dann mit y oder z.

6%-Aufgabe 15

Finde eine Gleichung für die Ebene E, die den Punkt $(3|7|-1)$ enthält und normal auf der Geraden $g:\ (x|y|z) = t \cdot (2|0|1)\quad t \in \mathbb{R}$ steht.

$2x + z$ muss irgendeine Zahl sein, die Zahl ist somit $2 \cdot 3 - 1 = 5$ also $2x + z = 5$.

6%-Aufgabe 16

Bestimme die Periode von $f(x) = 2 \cdot \cos(3\pi x) - 2\pi$.

Ablesen $T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2}{3}$.

6%-Aufgabe 17

Bestimme das kleinste Intervall, das alle Funktionswerte von f enthält, wenn $f(x) = 5 \cdot \sin(8x) + 9$.

$-5 + 9 = 4$ und $5 + 9 = 14$ also $[4; 14]$ ist das gefragte Intervall.

8%-Aufgabe 18

Berechne den Flächeninhalt vom Dreieck $\triangle ABC$ mit $A = (0|0)$, $B = (3|7)$ und $C = (4|6)$.

Tue als wären sie in 3D: $A = (0|0|0)$, $B = (3|7|0)$ und $C = (4|6|0)$, also als drei Punkte in der Ebene $z = 0$.

Dann Fläche ist $\frac{1}{2}|(3|7|0) - (4|6|0)| = \frac{1}{2}|(0|0|-10)| = 5$.

8%-Aufgabe 19

Berechne die Distanz zwischen $P = (0|0|2)$ und der Ebene $E: \; 3x - y + 2z = 9$.

Normalvektor $\vec{n} = (3| - 1|2)$ hat Norm $\sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$ und der Punkt $Q = (3|0|0)$ liegt in der Ebene E, also

$d = \frac{\overrightarrow{PQ}\vec{n}}{\sqrt{14}} = \frac{9-4}{\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{14}}$.

10%-Aufgabe 20

Gegeben sind 4 Punkte $A = (3|2|2)$, $B = (2|0|3)$, $C = (1|0|1)$ und $D = (-1|0| - 2)$. Bestimme, ob die vier Punkte in einer Ebene liegen (oder anderenfalls eine Pyramide bilden).

$\vec{a} = B - A = (-1| - 2|1)$, $\vec{b} = C - A = (-2| - 2| - 1)$, $\vec{c} = D - A = (-4| - 2| - 4)$. A, B und C spannen eine Ebene mit Normalvektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ auf. Wenn D auch in der Ebene liegt, muss $\vec{c}$ auch normal $\vec{n}$ stehen. Da $\vec{n} = (4| - 3| - 2)$ folgt $\vec{n} \cdot \vec{c} = -16 + 6 + 8 = -2$, also D liegt nicht in der Ebene aufgespannen durch A, B und C, also liegen diese vier Punkte nicht in einer Ebene und spannen somit ein Pyramide auf.

6%-Aufgabe 21

Von einer linearen Funktion ist bekannt, dass $f(0) = 9$ und $f(1) = 4$. Gib die Funktionsvorschrift an!

$f(0) = 9$ ergibt $d = 9$ also $f(x) = -5x + 9$.

Insgesamt Anzahl der Prozente: 160 %.

Es gab 7 Aufgaben mit 6%.

Es gab 11 Aufgaben mit 8%.

Es gab 3 Aufgaben mit 10%.