Korrekturvorlage der dritten Schularbeit Mathematik
Klasse 6A G am 19.03.2015

GRUPPE A und GRUPPE B

Nur die Reihenfolge war anders. Die Fragen waren dieselben.

Notenschlüssel:
Falls die Summe der erzielten Kompensationspunkte im zweiten Teil und des ersten Teils weniger als 16 ist, so ist die Note `Nicht Genügend`. Falls diese Summe 16 oder mehr beträgt, dann wird folgender Notenschlüssel benutzt:

NOTENSCHLÜSSEL	
41 - 48 Punkte	Sehr Gut (1)
33 - 40 Punkte	Gut (2)
24 - 32 Punkte	Befriedigend (3)
16 - 23 Punkte	Genügend (4)

Aufgabe 1. (2P) **Quadratische Gleichungen**. Gegeben ist die quadratische Gleichung
$0 = x^2 + 4x - 5$.
Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen. Geben Sie die zwei Lösungen an!

Aus $x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$ folgt:
Erste Lösung $x_1 = 1$, zweite Lösung $x_2 = -5$.

Aufgabe 2. (2P) **Zahlenmengen**. Gegeben sind einige Aussagen über $\sqrt{2}$

Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussagen an!	
1. ☐	$\sqrt{2} \in \mathbb{N}$.
2. ☒	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.
3. ☐	$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
4. ☒	$\sqrt{2}$ ist keine Bruchzahl.
5. ☐	$0 < \sqrt{2} < 1$.

Aufgabe 3. (2P) **Sinusfunktion I**. Gegeben ist die periodische Funktion

$$f(x) = 3\sin(\pi x)$$

Ergänzen Sie durch Ankreuzen den folgenden Text so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

An der Stelle _____①_____, hat die Funktion f _____②_____.

Möglichkeiten für ①	
$x = 0$	A
$x = 1$	B
$x = \frac{1}{2}$	C

Möglichkeiten für ②	
eine Nullstelle	A,B
den Wert 3	C
eine Extremstelle	C

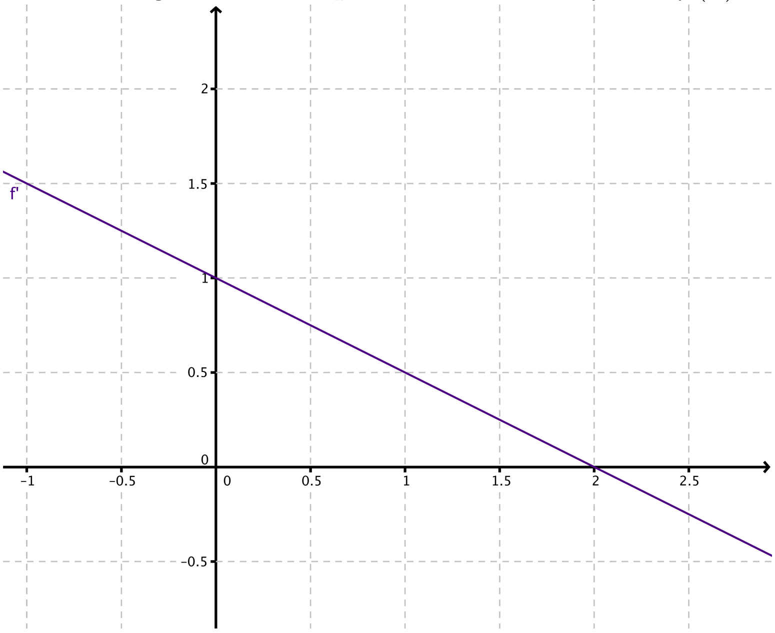
Aufgabe 4. (2P) **Ermitteln einer Funktionsvorschrift I**. Finden Sie a, b, sodass die Funktion $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ Periode 5 und Amplitude 3 hat.

$a = 3, \quad b = \frac{2\pi}{5}$.

Aufgabe 5. (2P) **Exponentialgleichungen**. Die Gleichung $25 = 10^x$ hat genau eine Lösung. Emitteln Sie diese Lösung!

Die Lösung von $25 = 10^x$ ist $x = {}^{10}\log(25) \approx 1,398$.

Aufgabe 6. (2P) **Parameter gesucht bei einer linearen Funktion**. Gegeben ist der untenstehend abgebildete Graph einer Funktion f mit $f(x) = kx + d$, $k, d \in \mathbb{R}$.



Bestimmen Sie die Parameter k und d anhand des Graphen!
$k = -\frac{1}{2}$
$d = 1$

Erster Teil

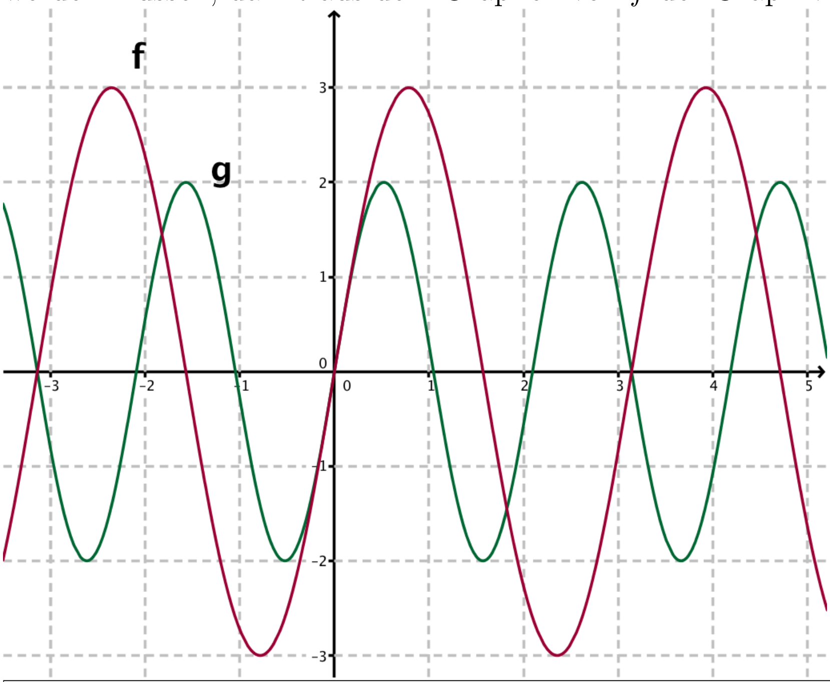
Aufgabe 7. (2P) **Allgemeine Sinusfunktion**. Gegeben ist die reelle Funktion Funktion f mit $f(x) = 2,5 \cdot \sin(\frac{\pi x}{2})$.
Skizzieren Sie den Graphen von f im Koordinatensystem! Die Nullstellen und lokalen Extremstellen müssen richtig eingezeichnet werden!
Was richtig sein musste: Nullstellen bei $x = 0$, $x = \pm 2$, $x = \pm 4$. Maximum bei $x = 1$ und $f(1) = 2,5$, Minimum bei $x = -1$ und bei $x = 3$ und zwar $f(-1) = f(3) = -2,5$.

Aufgabe 8. (2P) **Sinusfunktion II**. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3\sin(2x) + 1$. Entscheiden Sie, welche der untenstehenden Aussagen auf f zutreffen.

Aussage	Trifft zu
Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.	Ja
Die Funktion f hat an der Stelle $x = \pi$ eine Nullstelle.	
Die Funktionswerte von f liegen im Intervall $[-3; 3]$.	
Der Punkt $(\frac{\pi}{2}\|1)$ liegt auf dem Graphen von f.	Ja.
Die Periode ist π.	Ja.

Ad 2: $f(\pi) = 3 \cdot \sin(2\pi) + 1 = 3 \cdot 0 + 1 = 1$.
Ad 3: $-3 + 1 \leq f(x) \leq 3 + 1$ also $f(x) \in [-2; 4]$.
Ad 4: $f(\frac{\pi}{2}) = 3 \cdot \sin(\pi) + 1 = 0 + 1 = 1$.

Aufgabe 9. (2P) **Zwei Sinusfunktionen**. Im untenstehenden Bild sehen Sie die Graphen von f und g, wobei $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$. Entscheiden Sie, wie die Frequenz und Amplitude geändert werden müssen, damit aus dem Graphen von f der Graph von g hervorgeht!



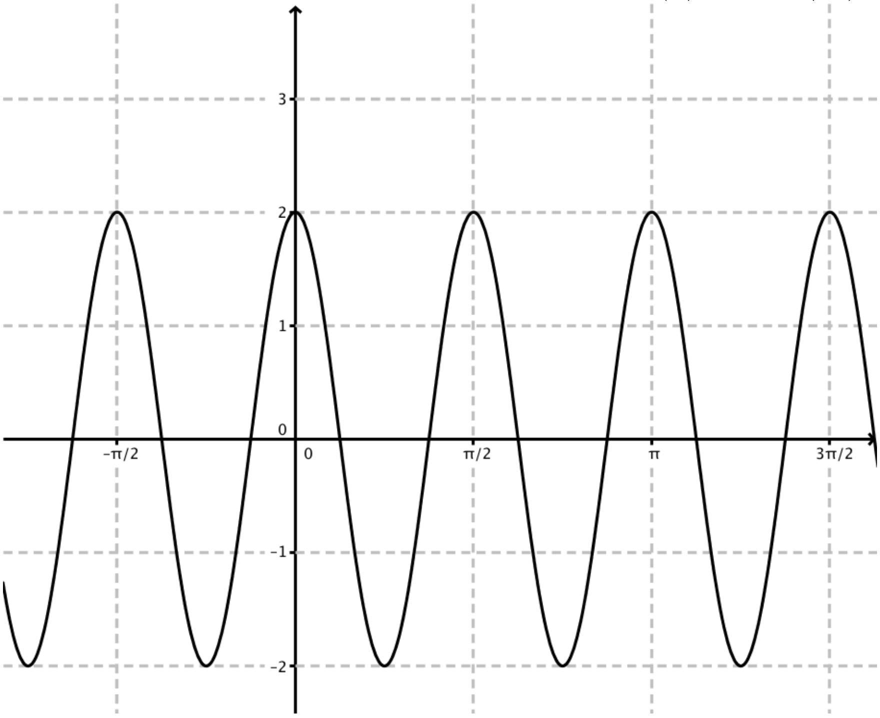
Kreuzen Sie die richtige Aussage an!	
1. ☒	a muss verkleinert, b muss vergrößert werden.
2. ☐	a und b müssen verkleinert werden.
3. ☐	a muss vergrößert, b muss verkleinert werden.
4. ☐	a und b müssen vergrößert werden.
5. ☐	Man kann a vergrößern und dabei b gleich lassen, oder umgekehrt.

Aufgabe 10. (2P) **Geraden**. Gegeben sind einige Aussagen über die Gerade $g: \quad x - 2y = 8$

Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussagen an!	
1. ☒	$(6\|-1) \in g$.
2. ☐	Die Gerade g geht durch den Ursprung.
3. ☒	Die Gerade g schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 8$.
4. ☐	Die Gerade g schneidet die x-Achse niemals.
5. ☐	Die Geraden $h: \quad y = 2x + 8$ und g sind identisch.

Ad 1: $6 - 2 \cdot -1 = 8$. Ad 2: $0 - 2 \cdot 0 = 0 \neq 8$. Ad 3: Falls $x = 8$ muss y Null sein, daher Aussage korrekt. Ad 4: Falls 3 richtig ist, kann 4 das nicht sein. Ad 5: Umformen: $h: \quad 2x - y = -8$, also ganz anders.

Aufgabe 11. (2P) **Parameter gesucht bei einer Cosinusfunktion**. Gegeben ist der untenstehend abgebildete Graph einer Funktion f mit $f(x) = a\cos(bx)$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{R}$.



Bestimmen Sie die Parameter a und b anhand des Graphen!
$a = 2$
$b = 4$

Aufgabe 12. (2P) **Formelwissen**. Folgende Formeln sind entweder für alle $x \in \mathbb{R}$ richtig, oder nicht.

Kreuzen Sie die Formeln an, die für alle $x \in \mathbb{R}$ richtig sind!	
1. ☐	$\tan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
2. ☒	$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
3. ☐	$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$.
4. ☒	$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$.
5. ☒	$\sin(x) = -\sin(-x)$.

Korrekturvorlage der 3. SA Mathematik Klasse 6A G am 19.03.2015

TEIL II *GRUPPE A & B*

Aufgabe 1.
Regentropfen haben die Form kleiner Kügelchen. Große Regentropfen haben einen Radius von 5mm, ganz kleine Regentropfen haben einen Radius von etwa 0,02mm. Die Geschwindigkeit, mit der Regentropfen bei Niederschlag nach unten fallen, nimmt mit zunehmender Fläche auch zu. Unten auf der Seite finden Sie nutzvolle Formeln!

(a) (2P Kompensationspunkte) Berechnen Sie, wie viel ganz kleine Regentropfen in einen großen Regentropfen passen.

Zwei Wege gebe ich euch:

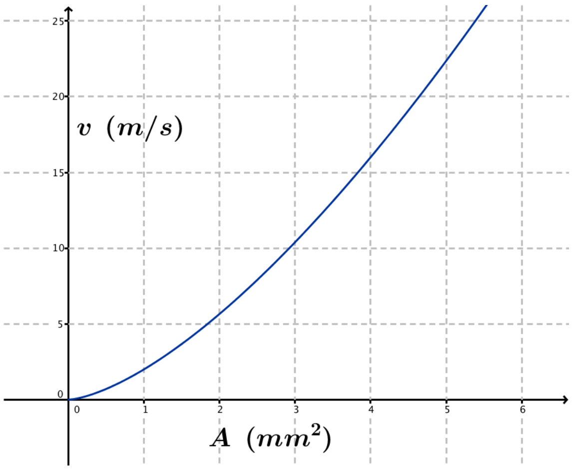
Weg 1: $V_1 = \frac{4}{3}\pi 5^3 mm^3$ und $V_2 = \frac{4}{3}\pi(0,2)^3 mm^3$, und dann V_1 durch V_2 dividieren.

Weg 2: Direkt $V_1 : V_2 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 : \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = (5 : 0,02)^3 = 15625000.$

Bis auf Rundungsunterschiede sind beide Ergebnisse gleich.

(b) (2P) Hier unten sehen Sie ein Bild, das die Geschwindigkeit v (in m/s) , mit der Regentropfen bei Niederschlag nach unten fallen, in Abhängigkeit von ihrer Fläche A (in mm^2) darstellt.

Entscheiden Sie anhand der Grafik, welche Aussagen zutreffen!



Kreuzen Sie die zwei zutreffenden Aussagen an!	
1. ☐	Um so größer die Fläche, desto langsamer ist der Regentropfen.
2. ☐	Die Geschwindigkeit v hängt linear von der Fläche A ab.
3. ☒	Fall $A = 2mm^2$ ist v etwas mehr als 5 Meter pro Sekunde.
4. ☒	Damit ein Regentropfen schneller als 10 m/s ist, muss seine Fläche mindestens etwa $3mm^2$ betragen.

(c) (4P) Bei einem ordentlichen Wolkenbruch kann pro Quadratmeter 100 Liter Niederschlag pro Stunde fallen. In den meisten Fällen sind die Regentropfen dann groß (Radius etwa 5mm). Berechnen Sie, wie viele Wassertropfen pro Stunde dann auf jeden Quadratmeter fallen!

Volumen eines Tropfens $V = \frac{4}{3}\pi 5^3 mm^3 \approx 523,6 mm^3$. Ein Liter sind $10^3 cm^3 = 10^6 mm^3$, und somit ist das Gefragte $100 \cdot \frac{10^6}{523,6} \approx 191.000$.

Aufgabe 2.
In Oslo sind die Tage im Winter kurz; die Sonne geht spät auf, und sie geht früh wieder unter. Im Sommer sind die Tage recht lange; die Sonne geht kurz nach Sonnenuntergang wieder auf. Der norwegische Mathematiklehrer Jens Hølderup Karlsen hat eine Tabelle erstellt mit der Sonnenaufgang und Sonnenuntergang. In dieser Tabelle ist x die Anzahl der Tage nach dem Äquinoktium (Tagundnachtgleiche) am 21. März. Die Tageslänge (in Std.) ist die Zeit zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang.

Tabelle (mit gerundeten Werten) von Jens Hølderup Karlsen:

Tag	Sonnenaufgang	Sonnenuntergang	Tageslänge (Std.)
21. März, $x = 0$	6:00	18:00	12
21. Juni (längster Tag), $x = 92$	2:30	21:30	19
21. September, $x = 183$	6:00	18:00	12
21 Dezember, $x = 275$	9:30	14:30	5

(a) (4P) Finden Sie eine Funktion $T(x) = a{\cdot}\sin(b{\cdot}x){+}c$ für die Tageslänge (in Std.) also Funktion von x, der Anzahl der Tage nach dem 21. März. Achtung: Diese Formel wird niemals die Tageslänge perfekt darstellen, sondern nur eine Annäherung sein.

(b) (2P - Kompensationspunkte) Am Nordkap bei Gamvik (Nord-Norwegen) geht die Sonne im Sommer für einige Tage gar nicht mehr unter, im Winter dafür geht sie für einige Tage gar nicht mehr auf. Was bedeutet das für die Parameter a, b und c in der Formel $T(x) = a \cdot \sin(b \cdot x) + c$? Kreuzen Sie die richtige Möglichkeit an!

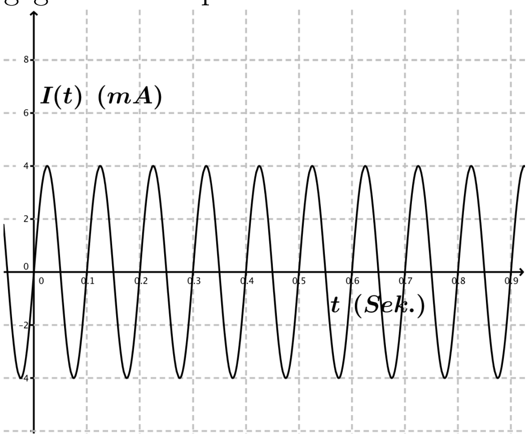
Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an!	
1. ☐	In Gamvik sind a und b größer als in Oslo, c ist gleich.
2. ☐	In Gamvik muss c größer als 12 (Std.) sein.
3. ☒	In Gamvik muss a größer 12 (Std.) sein.
4. ☐	In Gamvik muss $a = 24$ (Std.) sein.

(a) 12 Stunden im Schnitt, 7 Std. mehr im Sommer, 7 Stunden weniger im Winter. Periode ist 365 Tage.

$$T(x) = 7 \cdot \sin(\frac{2\pi}{365}x) + 12$$

(b) Achtung: die Periode ist überall auf Erde gleich, somit kann b nicht anders sein. Der Parameter c gibt den Mittelwert an, welcher auch überall 12 Std. ist. Mit Sicherheit ist es nicht zwingend, dass $a = 24$ sein muss, denn $a > 12$ reicht schon für den Effekt der Midsommernächte, bei denen die Sonne nicht untergeht.

Aufgabe 3.
Ein Wechselrichter ist ein Gerät, das Gleichstrom in Wechselstrom umwandelt. Bei dieser Umwandlung treten des öfteren Energieverluste auf. Um die Verluste zu bestimmen, werden bei gleichbleibender Eingangsspannung die Ausgangsstromstärken für verschiedene Frequenzen gemessen. Im untenstehenden Bild sehen Sie eine Grafik, die die Ausgangsstromstärke $I(t)$ (in Milliampère) bei gegebener Frequenz als Funktion von der Zeit t (in Sekunden) darstellt.



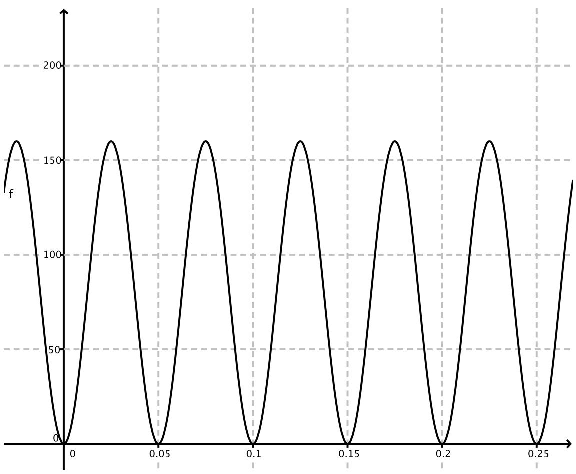
(a) (4P Punkte) Bestimmen Sie die Frequenz der Ausgangsstromstärke und finden Sie einen Ausdruck von der Form $I(t) = a \cdot sin(bt)$ für $I(t)$.

Ablesen: Periode $= 0,1$, also Frequenz ist $1/0,1 = 10$ Hz, und $b = \frac{2\pi}{0,1} = 20\pi$. Amplitude ist 4, somit $I(t) = 4\sin(20\pi t)$.

(b) (2P Kompensationspunkte) Die Ausgangsleistung $P(t)$ wird durch die Formel $P(t) = R \cdot I^2(t)$ gegeben. Für die hier durchgeführte Messung war gegeben, dass $R = 10\Omega$ ist. Ergänzen Sie unterstehende Tabelle und erstellen Sie anhand der Tabelle ein Diagramm für $P(t)$, das die Zeitabhängigkeit von $P(t)$ auf dem Intervall $[0; 0,1]$ zeigt.

Ablesen ergibt $I(0,025) = 4$ und somit $P(0,025) = 4^2 \cdot 10 = 160$.

t	0	0,01	0,02	0,025	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,075	0,08	0,09	0,1
$P(t)$	0	55	145	160	145	55	0	55	145	160	145	55	0



(c) (4P) Bestimmen Sie einen Ausdruck von der Form $a \cdot \cos(bt) + c$ für $P(t)$ und bestimmen Sie die Frequenz von $P(t)$.

Mittelwert ist 80. Es geht dann 80 nach oben und 80 nach unten; es fängt aber bei Null an! Periode ist $0,05$, somit $b = \frac{2\pi}{0,05} = 40\pi$. Daher $P(t) = 80 - 80\cos(40\pi t)$. Achtung, dies passt mit $\cos(0) = 1$, denn im Bild sieht man $P(0) = 80 - 80 = 0$.