Dritte Schularbeit Mathematik
Klasse 6A G am 29.05.2015
GRUPPE A

KORREKTURVORLAGE

Fehler sind nicht unmöglich ... aber bitte melden!

Notenschlüssel:
Falls die Summe der erzielten Kompensationspunkte im zweiten Teil und des ersten Teils weniger als 16 ist, so ist die Note `Nicht Genügend`. Falls diese Summe 16 oder mehr beträgt, dann wird folgender Notenschlüssel benutzt:

NOTENSCHLÜSSEL	
41 - 48 Punkte	Sehr Gut (1)
33 - 40 Punkte	Gut (2)
24 - 32 Punkte	Befriedigend (3)
16 - 23 Punkte	Genügend (4)

Aufgabe 1. (2P) **Billiger und billiger**. Eine Ware kostet zuerst A Euro. Demnächst wird die Ware um 15% verbilligt, danach wird sie weiter um 25% verbilligt. Schreiben Sie einen Term für den neuen Preis P von der Ware auf!

$P = 0,85 \cdot 0,75 \cdot A = \frac{51}{80} \cdot A = 0,6375 \cdot A$

Aufgabe 2. (2P) **Zahlenmengen**. Gegeben sind einige Aussagen über Zahlenmengen.

Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an!	
1. ☐	Jede rationale Zahl ist auch eine ganze Zahl.
2. ☐	Jede ganze Zahl ist eine natürliche Zahl.
3. ☐	Reelle Zahlen haben eine periodische Dezimalentwicklung.
4. ☐	$\sqrt{n}$ ist für jede $n \in \mathbb{N}$ eine irrationale Zahl.
5. ☒	$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (2P) **Quadratische Gleichung**. Gegeben ist die quadratische Gleichung

$$x^2 + qx + 10 = 0$$

Ergänzen Sie durch Ankreuzen den folgenden Text so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Falls ____①____, hat die quadratische Gleichung ____②____.

Möglichkeiten für ①	
$q < 0$	
$q^2 > 40$	A
$q^2 < 40$	B

Möglichkeiten für ②	
genau eine (reelle) Lösung	
zwei (reelle) Lösungen	A
keine (reellen) Lösungen	B

Kommentar: Diskriminante entscheidet! Bei $ax^2 + bx + c$ ist die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$. In diesem Fall $D = q^2 - 40$.

Aufgabe 4. (2P) **Ermitteln zweier Parameter**. Gegeben sind $\vec{u} = (1|-1)$, $\vec{a} = (3|1)$ und $\vec{b} = (-1|3)$. Finden Sie reelle Zahlen s, t sodass $\vec{u} = s\vec{a} + t\vec{b}$.

$s = \frac{1}{5}, \quad t = -\frac{2}{5}$.

Aufgabe 5. (2P) **Exponentialgleichungen**. Durch steigende Produktionskosten wird eine Ware jedes Jahr um 13% teurer. Entscheiden Sie, ob es eine exponentielle oder eine lineare Zunahme betrifft, und berechnen Sie, um wie viel Prozent des Anfangspreises der Preis in drei Jahren zunimmt!

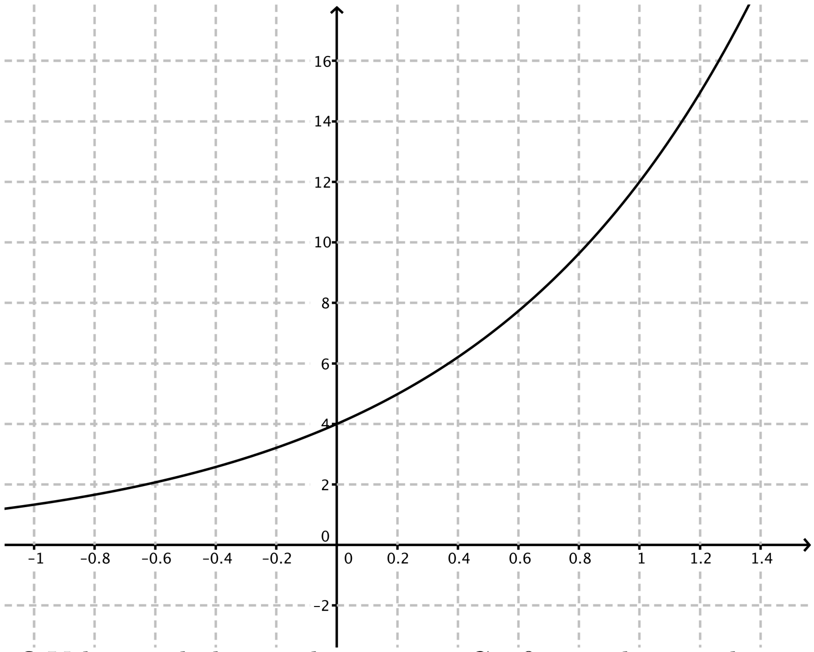
Es betrifft eine exponentielle Zunahme.

Nach drei Jahren hat der Preis um (insgesamt) 44,3% zugenommen. Denn $(1,13)^3 = 1,442897$.

Aufgabe 6. (2P) **Parameter gesucht bei einer linearen Funktion**. Gegeben ist eine lineare Funktion f mit $f(x) = kx + d$. Die Punkte $A = (3|7)$ und $B = (20|-5)$ liegen auf dem Graphen von f.

Bestimmen Sie die Parameter k und d!
$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{12}{17}$
$d = 7 + 3 \cdot \frac{12}{17} = 9\frac{2}{17}$

Aufgabe 7. (2P) **Exponentiallfunktion**. Hier im nebenstehenden Bild sehen Sie den Graphen einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$, mit $a, b \in \mathbb{R}^+$



Ermitteln Sie die Werte der Parameter a und b!

$a = f(0) = 4$
$b = 3$, denn $f(1) = a \cdot b^1 = ab = 12$ und somit $b = f(1)/a = 12/4 = 3$.

Aufgabe 8. (2P) **Vektor oder Skalar?** Vektoren haben nicht nur eine Größe, sondern auch eine Richtung. Skalaren sind Zahlen und haben also keine Richtung. Gegenen sind drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sowie zwei reelle Zahlen r und s.

Kreuzen Sie diejenigen Terme an, welche Vektoren sind!

Term	Vektor
$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$	☒
$r \cdot \vec{a} + \vec{b}$	☒
$t \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$	☐
$(r \cdot \vec{a} + \vec{b}) \cdot (a \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b})$	☐
$r \cdot \vec{a} - s \cdot \vec{b}$	☒

Aufgabe 9. (2P) **Parellele Vektoren**. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (2|x)$, $\vec{b} = (3|-2)$ und $\vec{c} = (5|1)$.

Bestimmen Sie die zweite Koordinate x von $\vec{a}$ so, dass $(\vec{a} - \vec{b})$ parallel zu $\vec{c}$ ist.

$x = -2,2$, denn $(\vec{a} - \vec{b}) = (-1|x+2)$, somit $5(x+2) = -1$ ist die zu lösende Gleichung.

Aufgabe 10. (2P) **Geraden**. Gegeben sind einige Aussagen über die Gerade $g: \quad 3x - 2y = 4$

Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussagen an!	
1. ☒	$(4 \mid -4) \notin g$.
2. ☒	Der Richtungsvektor von g ist parallel zu $(4 \mid 6)$
3. ☐	Der Vektor $(8 \mid 12)$ steht normal auf g.
4. ☐	Die Gerade g ist zu $h: \quad 2x - 3y = 4$ parallel.
5. ☐	Die Gerade g schneidet nur eine Koordinatenachse.

Aufgabe 11. (2P) **Rechtwinkliges Dreieck oder nicht?** Gegeben sind die drei Punkte $A = (3 \mid 3 \mid 0)$, $B = (-1 \mid -1 \mid 8)$ und $C = (3 \mid 5 \mid 5)$. Geben Sie an, ob es sich hier um ein rechtwinkliges Dreieck handelt oder nicht.

Nicht rechtwinklig, weil keines der Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$ und $\vec{b} \cdot \vec{c}$ null sind, wobei $\vec{a} = A - B$, $\vec{b} = B - C$ und $\vec{c} = C - A$.

Aufgabe 12. (2P) **Parallelogramm**. Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$ und S ist der Schnittpunkt der Diagonalen.

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Identitäten an!

Identität	
$S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$	☐
$S = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D$	☒
$C = A + 2\overrightarrow{SA}$	☐
$B - A = C - D$	☒
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{DS}$	☐

Vierte Schularbeit Mathematik Klasse 6A G am 29.05.2015

TEIL II *GRUPPE A*

Jahr	Weltbevölkerung in Mrd.
1990	5,3
2000	6,1
2015	7,3

Aufgabe 1. Die Weltbevölkerung wächst immer weiter. In der Tabelle sehen Sie die Anzahl der Menschen auf der Welt in den Jahren 1990, 2000 und jetzt (2015). Für jeden Menschen auf der Welt wird eine Fläche gebraucht, denn jeder Mensch braucht einen Platz zum Wohnen aber auch wird für das Essen, das jeder Mensch braucht, eine Fläche gebraucht, auf der das Essen angebaut wird. Darüber hinaus produziert jeder Mensch Abfall, was auch irgendwo einen Platz braucht. Der Flächeinhalt der Erdebeträgt 510 Million km^2, wovon die Landfläche 149 Million km^2 ausmacht. Nur 30% der Landfläche auf der Welt sind für Menschen zum Leben nutzvoll (bewohnbar und bebaubar).

(a) (2 Kompensationspunkte) Gehen wir davon aus, dass nur 30% der Landfläche auf der Welt für Menschen zum Leben geeignet sind, und dass jeder Mensch insgesamt 100 m^2 braucht. Bestimmen Sie, wie groß die Weltbevölkerung sein kann, damit es für alle auf der Welt genügend Platz gibt.

$\star$ Man kommt auf $44,7$ Million Quadratkilometer nutzbare Fläche. Das sind $44,7 \cdot 10^{12}$ Quadratmeter, denn $1km^2 = 10^6 m^2$. Das dividieren wir durch 100 und kommen auf Platz für $44,7 \cdot 10^{10}$ also 447 Milliarden Menschen.

(b) (2 Kompensationspunkte) In einem linearen Modell, nimmt man an, dass die Weltbevölkerung linear mit der Zeit zunimmt. Benutzen Sie die Zahlen aus dem Jahr 1990 und 2000 und stellen Sie eine lineare Formel $W(t)$ auf, die die Weltbevölkerung (in Mrd.) t Jahren nach 1990 angibt:

$W(t) = 5,3 + 0,08 \cdot t$

(c) (4 Punkte) Das exponentielle Modell der Weltbevölkerung wird durch die Formel $W(t) = 5,3 \cdot (1,014)^t$ beschrieben, wobei $W(t)$ in Mrd. Menschen angegeben wird und t die Zeit nach 1990 ist. Bestimmen Sie, in welchem Jahr es laut diesem exponentiellen Modell so viele Menschen gibt, dass es nicht mehr für alle genügend Platz auf der Welt gibt.

$\star$ Zu lösen ist also $5,3 \cdot (1,014)^t = 447$, Nota Bene, alles in Mrd. umwandeln!!! Man findet dann $t = \frac{{}^{10}\log(447/5,3)}{{}^{10}\log 1,014} \approx 319$, das bedeutet also im Jahr 2309!

Aufgabe 2.
Ein Pyramidenstumpf ist eine stumpfe Pyramide. Ein Pyramidenstumpf entsteht dadurch, dass man von einer Pyramide (Ausgangspyramide) parallel zur Grundfläche eine kleinere, ähnliche Pyramide (Ergänzungspyramide) abschneidet. Die Punkte $A = (-3|-3|0)$, $B = (-3|3|0)$, $C = (3|3|0)$ und $D = (3|-3|0)$ bilden die vier Punkte der Grundfläche einer Pyramidenstumpf. Die Vier Punkte $E = (-2|-2|2)$, $F = (-2|2|2)$, $G = (2|2|2)$ und $H = (2|-2|2)$ sind die vier Punkte der oberen Fläche (also die Decke).

(a) (2 Kompensationspunkte) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Gerade g durch die Punkte A und E an!

$\star$ $g: \quad (x|y|z) = (-3|-3|0) + t \cdot (1|1|2)$.

(b) (2 Kompensationspunkte) Geben Sie eine Gleichung (Normalvektorform) für die Seitenfläche $ABEF$ an.

$\star$ $2x - z = -6$, denn $\overrightarrow{AB}$ ist parallel zu $(0|1|0)$ und das Vektorprodukt mit $(1|1|2)$ ergibt $(2|0|-1)$.

(c) (3 Punkte) Finden Sie den Schnittpunkt von g und von der Gerade h, welche durch die Punkte B und F geht.

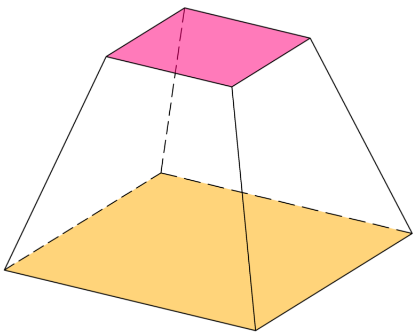
$\star$ Parameterdarstellung von h ist $h: \quad (x|y|z) = (-3|3|0) + s \cdot (1|-1|2)$. Wir bekommen somit drei Gleichungen: $2t = 2s$ wegen der z-Komponente, sodass $s = t$ und dann $-3 + t = 3 - t$ für die y-Komponente, sodass $t = 6$. Einsetzen ergibt $(0|0|6)$ und der Punkt liegt tatsächlich auf beiden Geraden – das muss man kontrollieren!

(d) (3 Punkte) Interpretieren Sie das Ergebnis von (d)! M.a.W., welche Bedeutung hat der von Ihnen bei (d) gefundenen Punkt?

$\star$ Der Punkt $S = (0|0|6)$ ist die Spitze der Ergänzungspyramide.

(e) (2 Punkte) Berechnen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfes $ABCD, EFGH$.

$\star$ Pyramide $ABCD, S$ hat Volumen $\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 72$. Pyramide $EFGH, S$ hat Volumen $\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = \frac{64}{3}$. Die Differenz ist das Gefragte, und sie beträgt $50\frac{2}{3}$.



Aufgabe 3. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1|0|0)$ und $\vec{b} = (0|0|b)$.

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{a} + \vec{b} \times \vec{a}$. Drücken Sie das Ergebnis in b aus!

$\star$ Man findet $\vec{a} + \vec{b} \times \vec{a} = (1|b|0)$. Somit bekommen wir ein rechtwinkliges Dreieck mit den Eckpunkten $A = (0|0|0)$, $B = (1|0|0)$ und $C = (1|b|0)$. Mit einer Skizze oder mit der Formel findet man dann gleich, dass der Winkel $\varphi = \angle BAC$ erfüllt $\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$, aber auch $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$ und $\tan(\varphi) = b$. Irgeneine dieser Beziehungen hätte als Antwort gereicht.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{b} \times (\vec{b} \times \vec{a})$ parallel zu $\vec{a}$ ist und bestimmen Sie die konstante λ in $\vec{b} \times (\vec{b} \times \vec{a}) = \lambda\vec{a}$.

$\star$ Man findet $\vec{b} \times (\vec{b} \times \vec{a}) = (-b^2|0|0) = -b^2 \cdot (1|0|0)$ sodass es klar ist, dass dieser Vektor zu $\vec{a}$ parallel ist und $\lambda = -b^2$ beträgt.