ein Kurs in das Thema von:

SINUS UND COSINUS ALS FUNKTIONEN

Liebe SchülerInnen! Hier unten findest du eine Anleitung für das recht technische Thema von Sinus und Cosinus als Funktionen. Hebe diese Anleitung gut auf, drucke sie selbst in Farbe aus, und benutze sie gut. Was du hier drinnen findest? (1) Tricks, (2) Merksätze, (3) einige Definitionen, (4) Aufgaben, (5) weiterführende Tipps und Aufgaben, und hoffentlich noch einiges mehr.

Was sind die **ZIELE**? (1) Du lernst einige Sachen selbstständig, in deiner Geschwindigkeit. Darum werde ich auch Zusatzaufgaben aufnehmen, und auch einige Wiederholungsaufgaben zur Festigung des Wissens geben. (2) Du lernst einige *allgemeine Funktionseigenschaften* kennen und einige *für Sinus und Cosinus typische Merkmale* kennen. (3) Du hast einen Überblick über diese interessante Verbindung zwischen Geometrie und Funktionen. (4) Du weißt, wann Sinus und Cosinus benutzt werden können – also, wann wir diese Funktionen einsetzen können, Probleme aus der wirklichen Welt zu lösen (Hauptstichwort: Periodizität).

Welches Wissen wird vorausgesetzt? (1) Die Definitionen von Sinus und Cosinus anhand des Einheitskreises. (2) Allgemeine Funktionseigenschaften, die in der 5. Klasse besprochen wurden, so wie Definitionsmenge, Wertemenge, steigend, fallend, Graphen. (3) Lineare Funktionen. (4) Quadratische Funktionen. (5) Sinus und Cosinus in rechtwinkligen Dreiecken.

TEIL 1: ALLGEMEINE FUNKTIONSEIGENSCHAFTEN

Es folgen hier jetzt einige Definitionen, aber auch Hinweise, wo die Definitionen ab und zu abweichen können. Denn verschiedene Bücher haben ab und zu leicht unterschiedliche Definitionen. Diese Unterschiede sind nervig, aber du wirst sehen, die Diskussionen über die Definitionen gehört natürlicherweise dazu. Die folgenden Definitionen werden auch im Unterricht besprochen. Manche sind aber so was von klar, dass ein spezieller Vortrag nicht immer notwendig sein wird. Bei Unklarheiten direkt alarmieren!

MONOTONIE

Definition 1. Wir nennen eine Funktion monoton steigend, wenn der Graph von links nach rechts betrachtet niemals nach unten geht. Algebraisch bedeutet das, dass wenn $b > a$, dann ist $f(b)$ nicht kleiner als $f(a)$. Formal aufgeschrieben: $b > a \Longrightarrow f(b) \geq f(a)$.

ACHTUNG! Manche Autoren nehmen nicht $f(b) \geq f(a)$ sondern $f(b) > f(a)$. Dann steigt der Graph also immer. Also niemals nach unten gehen ist nicht dasselbe wie immer steigen. Denn konstant bleiben ist nicht steigen, aber auch nicht nach unten gehen. Wir werden aber diesen Fall mit *strikt steigend* bezeichnen.

Definition 2. Wir nennen eine Funktion monoton fallend, wenn der Graph von links nach rechts betrachtet niemals nach oben geht. Algebraisch bedeutet das, dass wenn $b > a$, dann ist $f(b)$ nicht größer als $f(a)$. Formal aufgeschrieben: $b > a \Longrightarrow f(b) \leq f(a)$.

ACHTUNG! Manche Autoren nehmen nicht $f(b) \leq f(a)$ sondern $f(b) < f(a)$. Dann fällt der Graph also immer. Wir werden aber diesen Fall mit *strikt fallend* bezeichnen.

?! **Problem 1**. Skizziere jeweils zwei unterschiedliche Graphen für monoton fallende und monoton steigende Funktionen. Skizziere einen Graphen einer Funktion, die nicht strikt steigend ist aber schon monoton steigend.

?! **Problem 2**. Skizziere einen Graphen einer Funktion, die weder monoton steigend, noch monoton fallend ist.

Beispiel 1. Lineare Funktionen sind immer **monoton**. Das heißt, dass sie immer monoton steigend oder monoton fallend sind. Die Funktion $y = 2x + 1$ ist monoton steigend, die Funktion $y = -2x + 3$ ist monoton fallend; die Funktion $y = 3$ ist sowohl monoton steigend als auch monoton fallend.

?! **Problem 3**. Welcher Parameter in $f(x) = kx + d$ bestimmt ob die lineare Funktion f monoton fallend oder monoton steigend ist? Für welche Werte dieses Parameters ist f monoton steigend / monoton fallend?

Beispiel 2. Quadratische Funktionen sind weder monoton steigend noch monoton fallend. Skizziere mal den Graphen von $y = x^2$!

Beispiel 3. Auf einem Intervall kann man eine quadratische Funktion schon ab und zu monoton steigend oder fallend nennen. Zum Beispiel ist $y = x^2$ auf dem Intervall $[1, 3]$ monoton steigend. Auf dem Intervall $[-2, 0]$ ist sie aber monoton fallend.

?! **Problem 4**. Mache eine Wertetabelle für die Funktion $y = x^3$ und erstelle mithilfe der Tabelle einen Graphen. (Das Interval $[-3, 3]$ wird reichen um die wichtigsten Merkmale geschickt vermuten zu können.) Welche Art von Monotonie hat diese Funktion? (fallend / steigend)

Trick: Für den Begriff Monotonie ist es sicher sinnvoll, von einigen Typen von Funktionen die globale Form des Graphens zu wissen. Merke dir die von allgemeinen linearen, quadratischen Funktionen und auch von $y = x^3$. Später kommen dann mehrere Funktionen dazu, und von den diesen Typen solltest du die Form des Graphens schon zur Funktion dazu lernen. Also, "get the picture!"

Offene Frage[1]: Ich wundere mich, ob Menschen aus dem Teil der Welt, wo man die arabische Schrift benutzt, vielleicht eine kleine Schwierigkeit bei Monotonie haben wird. Werden diese Menschen vielleicht fallend und steigend leicht verwechselen? Wer die Antwort weiß, bitte mir mitteilen!

Zusatzaufgabe. (i) Zeige, dass wenn f monoton steigend ist, dann ist die Funktion g, definiert durch $g(x) = f(-x)$, monoton fallend. (ii) Zeige, dass wenn f monoton steigend ist, dann die Funktion h, definiert durch $h(x) = -f(x)$, monoton fallend ist. (iii) Analog, wenn f monoton steigend ist, dann definiert $f(4 - x)$ eine monoton fallende Funktion. [Kannst du den letzten Teil verallgemeinern?]

EXTREMSTELLEN

Definition 3 Die Intervalle von der Form (a, b) nennen wir offen. Die Intervalle von der Form $[a, b]$ nennen wir geschlossen. Die Intervalle der Form $[a, b)$ und $(a, b]$ sind halboffen / halbgeschlossen.

NB: Vor allem offen und geschlossen sind wichtig!

[1] Dass Deutschsprachige und Englischsprachige sich bei den Zahlen Billion, Trillion usw nicht verstehen, ist hoffentlich bekannt.

Definition 4. Wir nennen einen Wert a im Definitionsbereich einer Funktion eine Extremstelle oder Extremum falls a entweder ein Maximum oder ein Minimum ist. Der Wert a ist ein Maximum, wenn in einer kleinen offenen Intervall um a alle anderen Funktionswerte kleiner sind. Wir nennen a ein Minimum falls in einem kleinen offenen Intervall um a alle andere Funktionswerte größer sind.

Beispiel 4. (i) Lineare Funktionen haben keine Extremstellen. Wenn wir sie auf ein Intervall einschränken, dann können sie aber schon Extremstellen haben; in dem Fall nennt man das Randextremen. Die Funktion $y = 2x - 1$ hat auf dem Intervall $[0, 3]$ bei $x = 3$ ein Maximum und bei $x = 0$ ein Minimum. (ii) Die Funktion $f(x) = |x|$ hat bei $x = 0$ ein Minimum. (iii) Parabeln zeigen uns, dass quadratische Funktionen im allgemeinen eine Extremstelle haben.

?! **Problem 5**. (a) Untersuche die Funktion $f(x) = x^3$ auf Extremstellen. (b) Betrachte die Funktion f, die wie folgt definiert ist: auf $[0, 1]$ ist sie durch $f(x) = x + 1$ gegeben und auf $[1, 2]$ ist sie durch $f(x) = -x + 3$ gegeben. Untersuche die Funktion auf Extremstellen.

GeoGebra Problem. Untersuche "allgemeine" kubische Funktionen – also, Funktionen von der Form $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Wie viele Maxima/Minima/Extremstellen können sie haben. Wenn du die Antwort hast, dann versuchst du halt "allgemeine" Polynome von Grad vier – also Funktionen von der Form $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Definition 5. Wir nennen eine Extremstelle oft auch eine lokale Extremstelle. Dies um den Unterschied zu machen mit einer globalen Extremstelle. Eine Extremstelle ist eine globale Extremstelle, falls entweder alle anderen Funktionswerte kleiner sind, oder alle anderen Funktionswerte größer sind. Der Wert von x, wo die Funktion ihren gr¨oßten Wert annimmt, nennen wir ein globales Maximum und der Wert von x, wo die Funktion ihren kleinsten Wert annimmt, nennen wir ein globales Minimum.

Beispiel 5. (i) Quadratische Funktionen haben globale Extremstellen. (iii) Kubische Polynomen haben keine globalen Extremstellen, höchstens nur lokale: Betrachte zum Beispiel $f(x) = x(x^2 - 4) = x^3 - 4x$. Sie hat ein lokales Maximum bei $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, ein lokales Minimum bei $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ und die globalen Extremstellen liegen salop gesagt im Unendlichen. (Was das auch jetzt bedeuten möge.)

STETIGKEIT

Eine technische Sache haben wir bis jetzt noch nicht besprochen: Stetigkeit. Um dies für uns sinnvoll zu definieren, muss ich zuerst das Ganze etwas vereinfacht darstellen: Nehmen wir an, wir haben eine Funktion f definiert auf einem Intervall I. Diese Intervall darf die ganze reelle Linie $\mathbb{R}$ sein, oder etwas wie (a, ∞), aber auch offen und geschlossen. Wir nennen diese Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, wenn der Graph eine Kurve ohne Sprünge ist. In der Regel wird diese Definition reichen. Da sie nicht eine echte Definition ist, werde ich auch nicht eine daraus machen. Ich gebe mal einige Beispiel, um klar zu machen, was stetig sein bedeutet.

Beispiel 6. (a) Die Funktion $f(x) = |x|$ ist stetig; f ist hier definiert auf ganz $\mathbb{R}$. (b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = +1$ falls $x \geq 0$ und $f(x) = 0$ falls $x < 0$ ist nicht stetig. (c) Die Funktion $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ist stetig auf dem Intervall $[-1, 1]$ – und außerhalb des Intervalls ist sie nicht mal definiert. (d) Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{N}$ definiert durch" $f(x)$ ist die größte natürliche Zahl kleiner als x" ist nicht stetig. Achtung! $f(0) = 0$, $f(0,5) = 0$, $f(0,9) = 0$, $f(1,12) = 1$ usw. Zeichne den Graphen mal. (Leiterfunktion.)

SYMMETRIE

Definition 6. Wir nennen eine Funktion symmetrisch falls der Graph spiegelsymmetrisch bezüglich Spiegelungen an der y-Achse ist. Algebraisch bedeutet das $f(-x) = f(x)$. Wir nennen eine Funktion antisymmetrisch falls der Graph spiegelverkehrt bezüglich Spiegelungen an der y-Achse ist. Algebraisch bedeutet das $f(-x) = -f(x)$.

Beispiel 7. (i) Die Funktion $f(x) = x$ is antisymmetrisch. (ii) Die Funktion $y = x^2$ ist symmetrisch. (iii) Die Funktion $y = x^3$ ist antisymmetrisch. (iv) Die Funktion $y = |x|$ ist symmetrisch.

?! **Problem 6**. (i) Untersuche die Funktionen $y = kx + d$ auf Symmetrien. Für welche Werte von k und/oder d sind sie symmetrisch/antisymmetrisch? (ii) Welche Symmetrie hat $f(x) = -x^2 + 3$?

Wir werden auch über Spiegelsymmetrien bezüglich anderer Geraden reden. Das werde ich dann immer mit Beispielen tun, damit es klar ist.

Beispiel 8. (i) Die Funktion $f(x) = (x-1)^2$ ist weder symmetrisch noch antisymmetrisch im oben beschriebenen Sinne. Sie ist aber symmetrisch bezüglich Spiegelungen an der Geraden $x = 1$. (ii) Die Funktion $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ist symmetrisch.

?! **Problem 8**. (i) Sind direkte Proportionalitäten (anti-)symmetrisch? (ii) Sind indirekte Proportionalitäten (anti-)symmetrisch?

Zusatzaufgabe. Kann eine Funktion symmetrisch bezüglich Spiegelungen an der x-Achse sein? Untersuche! Versuche Beispiele zu konstruieren!

Zusatzaufgabe. (i) Zeige, dass wenn f und g beide symmetrisch sind, dann auch das Produkt $h(x) = g(x)f(x)$ eine symmetrische Funktion definiert. (ii) Was für Symmetrieeigenschaften hat das Produkt, wenn f symmetrisch ist und g antisymmetrisch ist. (iii) Was für Symmetrieeigenschaften hat das Produkt, wenn f und g antisymmetrisch sind?

Nach der vorigen Zusatzaufgabe sollte es klar sein, dass symmetrische Funktionen auch wohl gerade und antisymmetrische Funktionen auch wohl ungerade genannt werden.

Achtung: Wenn wir eine (anti-)symmetrische Funktion horizontal verschieben [$f(x)$ durch $f(x+a)$ ersetzen], verliert sie ihre Symmetrieeigenschaft. Wenn wir eine Funktion vertikal verschieben [$f(x)$ durch $f(x) + a$ ersetzen], behält sie ihre Symmetrieeigenschaften.

Trick: Wenn du den Graphen einer noch unbekannten Funktion zeichnen musst, schau mal ob du schnell sehen kannst, ob sie symmetrisch oder antisymmetrisch ist. Das macht das Zeichnen viel leichter. Zum Beispiel $f(x) = (x^2 - 4)^2$ ist wegen des x^2-Teils symmetrisch, daher muss ich nur für positive x den Graphen zuerst zeichnen. Dann kann ich den Teil für negative x durch Spiegeln finden.

Periodizität

Wir nennen eine Funktion periodisch, wenn sie sich ständig wiederholt. Das heißt also, der Graph besteht aus Teilen, die alle identisch sind. Das müssen wir noch exakt machen:

Definition 7. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nennen wir periodisch, falls es eine positive Zahl a gibt, sodass $f(x+a) = f(x)$. Die kleinste positive Zahl a mit dieser Eigenschaft nennt man die Periode.

ACHTUNG!!! Konstante Funktionen könnte man periodisch nennen. Nur haben sie keine Periode.

Beispiel 9. Die meisten Funktionen, die wir bis jetzt hatten sind nicht periodisch. Linear, quadratisch, kubisch, all dies wird uns keine Periodizität zeigen. Wir können aber sehr leicht eine periodische Funktion basteln. Definier $f(x) = x$ auf dem Intervall $(0, 1]$ und setze sie dann periodisch fort; also auf $(0, 2]$ wird sie $f(x) = x - 1$, wie man relativ leicht kontrolliert. Eine andere bekommen wir, wenn wir auf $[0, 1]$ definieren $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ und sie dann periodisch fortsetzen.

Beispiel 10. Die für uns wichtigsten periodischen Funktionen sind die trigonometrischen Funktionen: $f(x) = \sin(x)$ ist ein mustergültiges Beispiel für eine periodische Funktion.

?! **Problem 9**. Nachdem wir anhand des Einheitskreises die Definition von $f(x) = \sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ – also nicht nur auf $[0, 2\pi]$ – aufgefrischt haben, solltest du dieses Problem gut studieren: (i) Finde die Periode von $f(x) = \sin(x)$, (ii) Finde die Periode von $g(x) = \sin(2x)$, (iii) Finde die Periode von $h(x) = \sin(3x)$ und (iv) Finde die Periode von $k(x) = \sin(x/2)$.

TEIL 2: SINUS UND COSINUS

Erinnerung: Bogenmaß: Ein Winkel in Bogenmaß misst die Strecke entlang eines Kreises mit Radius 1. Also, 360^o sind dann 2π, 180^o sind dann π, 90^o sind dann $\pi/2$. Zeichne einen Einheitskreis und zeichne die Winkel 30^0, 60^0, 45^o, 120^o, 135^o, 90^o, 270^o ein und schreibe das Bogenmaß dazu.

Trick: Lerne die Graphen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ auswendig. Es ist dann leichter, von anderen Funktionen wie $y = 3\sin(5x - \pi) + 12$ den Graphen zu zeichnen, indem man einige 'Transformationen' anwendet.

Merksatz: Nullstellen von Sinus. Die Gleichung $\sin(x) = 0$ wird gelöst durch $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Das sind also die Zahlen $\ldots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$.

Merksatz: Nullstellen von Cosinus. Die Gleichung $\cos(x) = 0$ wird gelöst durch $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Das sind also die Zahlen $\ldots, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots$.

?! **Problem 10**: Löse folgende Gleichungen: (a) $\sin(3x) = 0$, (b) $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = 0$, (c) $\sin(4x) = 1$, (d) $\cos(5x - \frac{\pi}{3}) = 0$.

Merksatz: Wenn wir den Graphen von $\sin(x)$ um $\pi/2$ nach links verschieben, dann bekommen wir den Graphen von $\cos(x)$. In Formelsprache: $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.

Merksatz: Wenn wir einen Graphen um a nach <u>links</u> verschieben wollen, dann tun wir das, indem wir $f(x)$ durch $f(x + a)$ ersetzen.

Beispiel 11. Kontrolliere, dass die Parabel $y = (x + 1)^2$ dieselbe ist wie von $y = x^2$ nur um eins nach LINKS verschoben.

Merksatz: Wenn wir einen Graphen um a nach <u>oben</u> verschieben wollen, dann tun wir das, indem wir $f(x)$ durch $f(x) + a$ ersetzen.

Achtung: Es gibt also einen RIESIGEN UNTERSCHIED zwischen $f(x) + a$ und $f(x + a)$. Kontrolliere mal selbst $y = x^2 + 1$ und $y = (x + 1)^2$.

?! **Problem 11**. Zeichne die Graphen von (a) $f(x) = \sin(x - \pi)$, (b) $g(x) = \sin(x) - 2$, (c) $h(x) = \cos(x + 1)$, (d) $k(x) = \cos(x) + 1$.

Merksatz: Wenn wir einen Graphen um einen faktor a vertikal ausdehnen wollen, tun wir das indem wir $f(x)$ durch $af(x)$ ersetzen.

Beispiel 12. Der Graph der Funktion $y = 3x$ ist genau dreimal so steil wie der von $y = x$. Der Graph von $y = 2\sin(x)$ ist dieselbe Welle wie von $y = \sin(x)$, nur ist sie um einen Faktor 2 ausgedehnt.

?! **Problem 12**. Zeichne den Graphen von (a) $y = 3\sin(x) - 1$, (b) $y = -\cos(x + \pi)$, (c) $y = \frac{\sin(x)}{2}$

Merksatz: Wenn wir einen Graphen um einen faktor a horizontal stauchen wollen, tun wir das, indem wir $f(x)$ durch $f(ax)$ ersetzen.

Beispiel 13. Der Graph der Funktion $y = 3x$ kann man auf zwei Weisen aus dem von $y = x$ bekommen: (i) vertikal um einen Faktor 3 dehnen, oder (ii) horizontal um einen Faktor 3 stauchen.

?! **Problem 13**. Zeichne den Graphen von (a) $y = \sin(5x)$, (b) $y = 2\cos(2x)$, (c) $y = 3\sin(x - \frac{\pi}{3})$.

?! **Problem 14**. Berechne die Periode von (a) $y = 4\sin(5x)$, (b) $y = -2\cos(6x - 3)$, (c) $y = 3\sin(4x - 2) + 1$.

Merksatz: (i) Die Maxima von $\sin(x)$ finden wir bei $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, mit $k \in \mathbb{Z}$. (ii) Die Minima von $\sin(x)$ finden wir bei $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, mit $k \in \mathbb{Z}$. (iii) (i) Die Maxima von $\cos(x)$ finden wir bei $x = 2k\pi$, mit $k \in \mathbb{Z}$. (iv) (i) Die Minima von $\cos(x)$ finden wir bei $x = \pi + 2k\pi$, mit $k \in \mathbb{Z}$.

Tipp: Lerne obigen Merksatz nicht auswendig! Lerne aber die Graphen von sin und cos auswendig und lerne es, die Extremstellen schnell abzulesen!

Definition: Eine Funktion f nennen wir von oben beschränkt falls es eine Zahl M gibt, sodass $f(x) < M$ für alle x. Eine Funktion f nennen wir von unten beschränkt falls es eine Zahl M gibt, sodass $f(x) > M$ für alle x. Eine Funktion f nennen wir beschränkt falls es eine positive Zahl M gibt, sodass $-M < f(x) < M$ für alle x.

Beispiel 14. (i) $f(x) = x^2$ ist von unten beschränkt, nicht von oben. (ii) $g(x) = x^3$ ist nicht beschränkt, weder von oben, noch von unten. (iii) Lineare Funktionen sind niemals beschränkt, falls die Definitionsmenge $\mathbb{R}$ ist.

?! **Problem 15**. Untersuche die Funktionen $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$ und $h(x) = \tan(x)$, ob und wie sie beschränkt sind.

?! **Problem 16**. Untersuche die Funktionen $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $G(x) = 12\cos^2(15x) + \cos(3x)$ auf Beschränktheit.

GeogebraProblem. Untersuche die Funktion $K(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ auf Beschränktheit. Untersuche vor allem das Verhalten in der Nähe von $x = 0$. Achtung: Diese Aufgabe geht auch mit Google. Hinweis: lasse einen Computer $\sin(x)/x$ ausrechnen für $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{8}$, und so weiter.

Merksatz: Es gelten die wichtigen Ungleichungen $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ und $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

?! **Problem 17**. Untersuche die Funktion $f(x) = \sin(x)$ auf (i) Monotonie, (ii) Extremstellen, (iii) Stetigkeit, (iv) Symmetrie, (v) Periodizität.

?! **Problem 18**. Unterscheide, welche Funktionen symmetrisch, antisymmetrisch sind oder keine Symmetrie aufweisen: (a) $y = \cos(x)$, (b) $y = \sin(x)$, (c) $y = \tan(x)$, (d) $y = \cos^2(x) - 1$, (e) $y = \sin^2(x) + 3$, (f) $y = \frac{1}{1+\sin^2(x)}$, (g) $y = x\sin(x)$, (h) $y = x\cos(x)$.

?! **Problem 19**. Betrachte im Allgemeinen die Funktionen vom Typ $y = a\sin(bx)$ mit a und b zwei reelle Parameter. (i) Lokalisiere die Nullstellen, (ii) Lokalisiere die Maxima, (iii) Lokalisiere die Minima, (iv) Finde die Periode, (v) Finde gute Schranken (was ist der Maximum- bzw. Minimumwert der Funktion?), (vi) Beschreibe die Rollen von a und b.

TEIL 3: ANWENDUNGEN

So wie lineare Funktionen wichtige Basisfunktionen sind, so sind Sinus und Cosinus das auch. Ich werde kurz erklären warum, aber pass auf, Details kann ich nicht geben. Jede 'glatte' Funktion schaut lokal aus wie eine lineare Funktion: wenn wir richtig einzoomen, schauen die meisten Graphen aus, als würden sie Geraden sein. Vergleiche mal mit der Erde, sie ist eigentlich eine Kugel, aber ein Fussballfeld schaut doch wie ein flaches Rechteck aus. Lineare Funktionen sind also gute Funktionen um viele Funktionen anzunähern. Wir zoomen dann ein, schauen uns die lineare Approximation an, und untersuchen diese Approximationen.

Sinus und Cosinus kann man als Bausteine benutzen. Aber wie dann? Jede Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kann man 'recht gut' annähern indem man Summen von $\sin(cx)$ und $\cos(cx)$, wobei c geschickt gewählt werden muss. Da man viel über Sinus und Cosinus weiß, kann man dieses Wissen auf allgemeine Funktionen übertragen. Aber auch in Simulationen von zum Beispiel Flugzeugströmungsmustern müssen viele Funktionen gespeichert werden. Dies kann man mit einem sogenannten FFT (Fast Fourier Transform) machen; man schreibt die Funktion als Summe von Sinus und Cosinus, was meist bis sehr große Genauigkeit geht, und speichert sich diese Sinus und Cosinus. Dafür braucht man weniger Speicherplatz und ist in Berechnungen viel schneller, als wenn man die ganze Funktion (oder Tabelle) speichert.

Aber, leider kann ich euch über Fourieranalyse nicht viel sagen. Hoffentlich kommen wir darauf zurück, denn das ist wirklich spannend und sehr kräftig. In der Schule lernt man meist nur die Basis von etwas, das spannend wird, wenn man mehr weiß. Leider muss man eine sehr breite Basis lernen, bevor man in der Mathamtik spannende Sachen machen kann. Jedoch gibt es einige spannende Sachen, die man sogar in der Schule behandeln kann. Ich suche sie ...

Forschungsfrage A. Finde periodische Phänomene, die man auf der Erde (oder sogar im Weltall) beobachten kann. Finde mindestens 10.

Forschungsfrage B. Bauen wir ein Modell für die Tageslänge. (i) Skizziere den Verlauf der Länge eines Tages in Abhängigkeit vom Monat. (ii) Nimm realistische Werte für Maximum, Minimum und Mittelwert der Tageslängen. (iii) Was ist die Periode? (iv) Finde eine geeignete Funktion $y = a\sin(bx) + c$ – Hinweis: Was ist der Mittelwert von $y = \sin(x) + c$? (v) Reflektion: Warum wird dieses Modell (diese Funktion) nur eine gute Annäherung sein? (Hinweis: Ellipse.)

Forschungsfrage C. Der Radius einer Planetbahn ist durch $R(\alpha) = \frac{A}{1+B\cos(\alpha)}$ gegeben, wobei α der Winkel ist (Winkel mit einer Achse durch die Ellipse), A ist etwa die mittlere Distanz zur Sonne und B ist ein Parameter, der angibt, wie elliptisch die Bahn ist. Der Parameter B liegt im Interval $[0, 1)$. (i) Wähle $A = 100$ und finde für $B = 0$, $B = 0,1$ und $B = 0,6$ Maximum/Minimum des Abstands Sonne–Planeten. Skizziere die Form der Planetbahn für die verschiedene Werte von B (drei Ellipsen in verschiedenen Farben bitte!). (ii) Besprich die Rolle von B im Sinne der Form der Planetbahn? Passt der Name 'Exzentrizität' zu B?

Forschungsfrage D. Was passiert wenn zwei Wellen auf einander treffen? Hierbei ist es ratsam, Google oder GeoGebra zu benutzen! (i) Addiere die Funktionen $y = \sin(x)$ und $y = \sin(x)$ und zeichne den Graphen, (ii) Addiere die Funktionen $y = \sin(x)$ und $y = \sin(x + 0,3)$ und zeichne den Graphen. (iii) Mache dasselbe für $y = \sin(x)$ und $\sin(x + \frac{\pi}{2})$ und für $y = \sin(x)$ und $y = 1,1 \cdot \sin(x + \pi)$, aber auch für $y = \sin(x)$ und $y = \sin(x + \pi)$. (iii) Die Zahl c in $a \sin(bx + d) + d$ heißt Phase. Addiere selbst noch einige periodische Funktionen und kommentiere die Rolle des Phasenunterschieds beim Addieren von Wellen. (iv) Was muss der Phasenunterschied sein, damit Wellen sich verstärken? Was muss der Phasenunterschied sein, damit die Wellen sich möglichst auslöschen? (v) Es gibt Antischall. Wie wird das wohl funktionieren? Wenn du nicht selbst darauf kommst, dann gibt es Google (neben dem Mathelehrer vielleicht dein viertbesster Freund ;-)).

WAS NOCH KOMMT ...

Wir haben jetzt schon ziemlich etwas über Sinus, Cosinus und Funktionen im Allgemeinen gehabt, aber noch nicht alles. Was noch fehlt: Änderungsraten, Differenzenquotienten, aber auch Invertierbarkeit. Die ersten zwei Themen kennen wir schon ein wenig, nur Invertierbarkeit ist völlig neu. Eine Funktion ist invertierbar, wenn zu jedem y-Wert es genau ein x-Wert passt. Somit ist die Funktion $y = x^2$ auf $\mathbb{R}$ nicht invertierbar, denn $y = 1$ hat zwei Lösungen. Aber auf $\mathbb{R}^+$ ist die Funktion $y = x^2$ schon invertierbar, und die Inverse ist dann $y = \sqrt{x}$. Die Funktionen Sinus und Cosinus sind nicht invertierbar; siehst du warum?

Eine andere Sache: Singularitäten. Die Funktion $y = \frac{1}{1-x^2}$ ist bei $x = \pm 1$ singulär. Aber was bedeutet das? Die Funktion $y = \frac{1}{1+x^2}$ ist nicht singulär. Die Funktion $y = \frac{\sin(x)}{x}$ ist ein wichtiges Beispiel (eine Lektion); sie schaut singulär aus, aber ist es dann wieder eigentlich nicht. Was meinen wir damit? Das müssen wir noch besprechen. So wie du vermuten wirst, sollten wir uns dann auch über $\pm\infty$ Gedanken machen, etwas, das ich für extrem spannend halte!