

Multiplikations-/Additionsregel

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

Liebe SchülerInnen!

Es gibt einige Regelmäßigkeiten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die auch für die Matura wichtig sind, und die vor allem Einsicht in die Thematik geben. Nach dieser Arbeit und der dazu gehörenden Unterrichtssequenz mit Aufgaben und Erklärungen aus dem Buch, sollten folgende Begriffe klar sein, und zwar so, dass du sie erklären und benutzen kannst: *Baumdiagramm, das sichere Ereignis, das unmögliche Ereignis, Ereignismenge bzw. Ereignisraum, Produktregel, Additionsregel bzw. Summenregel, Zufallsvariable*. Natürlich gibt es noch mehr, das du kennen und verstehen musst, aber diese Begriffe sind zuerst einmal das Gerüst.

Ein **Zufallsexperiment** kennen wir schon; es gibt eine Abfolge von ‘Experimenten’, aus denen verschiedene ‘Ergebnisse’ kommen können. Jedes Ergebnis hat eine Wahrscheinlichkeit, dass es eintritt. Ich werde hier zwei Zufallsexperimente als Faden durch diese Erklärung benutzen: (1) Experiment EINS ist das Experiment, bei dem wir einmal mit einem ehrlichen Spielwürfel werfen, (2) Experiment ZWEI ist das Experiment bei dem wir zweimal mit einem ehrlichen Spielwürfel werfen.

Der **Ereignisraum**, ab und zu auch die **Ereignismenge** genannt, ist eine Menge, die beschreibt, was sich bei dem Experiment ereignen kann. Er ist sozusagen die Menge der Ereignisse.

Aufgabe 1. Beschreibe die Ereignisräume der beiden Zufallsexperimente EINS und ZWEI.

Du wirst wohl gesehen haben, dass Experiment EINS einen Ereignisraum mit 6 möglichen Auskünften hat, aber dass Experiment ZWEI 36 Ereignisse aufliefern kann

Nennen wir X_1 die **Zufallsvariable** “die Augensumme bei Experiment EINS” und X_2 ist die Zufallsvariable “die Augensumme bei Experiment ZWEI”. Du wirst nicht viel Schwierigkeiten haben, einzusehen, dass $P(X_1 = 4)$, die Wahrscheinlichkeit, dass $X_1 = 4$, genau $1/6$ ist. Nur, was ist $P(X_2 = 4)$? Dann müssen wir, zuerst herausfinden, welche Ereignisse dazu passen.

Aufgabe 2. Finde heraus, wie viele Paare (a, b) mit $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $a + b = 6$ es gibt. Berechne damit $P(X_2 = 4)$.

Aufgabe 3. Berechne jetzt $P(X_2 = 1)$, $P(X_2 = 2)$ usw. bis $P(X_2 = 12)$. *Hinweis:* Begründe, dass diese **Verteilung** symmetrisch ist, im Sinne $P(X_2 = 2) = P(X_2 = 12)$. $P(X_2 = 3) = P(X_2 = 11)$ usw.

Aufgabe 4. Sei Experiment DREI das Experiment bei dem drei Mal mit einem ehrlichen Würfel geworfen wird. Sei X_3 die Zufallsvariable “Augensumme nach drei Würfeln”. Berechne $P(X_3 = 1)$, $P(X_3 = 3)$, $P(X_3 = 4)$, $P(X_3 = 7)$.

Aufgabe 5. Berechne (oder begründe das Ergebnis) $P(X_1 < 7)$, $P(2 \leq X_2 \leq 12)$, $P(X_2 < \infty)$.

Nach den obigen Aufgaben solltest du einiges beobachtet haben:

(A) Wenn ein Ereignis unmöglich ist, kennen wir ihm eine Wahrscheinlichkeit NULL zu. So ein Ereignis ist auch wohl das **unmögliche Ereignis**. Wenn $P(X = a) = 0$, dann ist $X = a$ etwas Unmögliches.

(B) Wenn etwas mit Sicherheit eintritt, sodass etwas Anderes nicht einmal möglich wäre, dann kennen wir dem Ereignis die Wahrscheinlichkeit EINS zu. Also, wenn X mit Sicherheit in einer Menge Ω liegt, dann $P(X \in \Omega) = 1$.

Aufgabe 6. Ein Wettermann (-frau) behauptet: *Morgen scheint mit 45% Wahrscheinlichkeit die Sonne, und mit 50% Wahrscheinlichkeit scheint sie nicht.* Welche Regel wurde verletzt?

Aufgabe 7. Es gibt einen Unterschied zwischen folgenden Aussagen:

(1) Die Wahrscheinlichkeit, dass es am dritten November 2016 auf dem Südpol 300 Grad unter Null liegt ist NULL.

(2) Die Wahrscheinlichkeit, dass es am dritten November 2016 in der Atacamawüste regnet ist fast NULL.

Diskutiere den Unterschied!

Aufgabe 8 (1). Ein etwas verrückter Ingenieur (nicht gegen Ingenieure!) hat mit einem Spielwürfel herumgetrickst und vollen Stolzes behauptet er: *Die Wahrscheinlichkeit auf 1 beträgt $\frac{1}{20}$, die Wahrscheinlichkeit auf 2 beträgt $\frac{1}{10}$, die Wahrscheinlichkeit auf 3 beträgt $\frac{3}{20}$, die Wahrscheinlichkeit auf 4 beträgt $\frac{1}{5}$, die Wahrscheinlichkeit auf 5 beträgt $\frac{1}{4}$ und die Wahrscheinlichkeit auf 6 muss ich dir nicht mehr sagen.* Warum muss er das nicht mehr sagen? Berechne diese Wahrscheinlichkeit und berechne die Wahrscheinlichkeit auf eine gerade Augensumme und die Wahrscheinlichkeit auf eine ungerade Augensumme (jeweils bei einem Wurf).

Jetzt aber sollte dir das Folgende nicht mehr komisch vorkommen:

(C) *Um eine bestimmte Wahrscheinlichkeit auszurechnen, kann man die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignissen, die dazu passen, aufaddieren. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignissen aus dem Ereignisraum ergibt 1.* Diese Tatsache nennt sich die Summenregel.

Aufgabe 8 (2). Interpretiere und kontrolliere folgende Aussage $P(X_1 \in \{1, 2\}) = P(X_1 = 1) + P(X_1 = 2)$.

Aufgabe 9. Interpretiere und kontrolliere folgende Aussage $P(X_2 < 8) = 1 - P(X_2 \geq 8)$.

Aufgabe 10. Berechne auf 'geschickte' Weise, die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme bei Experiment ZWEI nicht zweistellig ist. (Also, nicht 10, 11, 12.)

Die Frage, was passiert, wenn wir ein Experiment wiederholen, oder mit einem anderen Experiment verknüpfen, beantwortet die Multiplikationsregel.

Betrachten wir zuerst Experiment ZWEI. Die Wahrscheinlichkeit auf (5,6) beträgt $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$, denn ein Sechstel für den ersten Wurf, und dann nochmal ein Sechstel für den zweiten. Ist ja auch logisch, denn wenn es beim ersten Wurf 6 Möglichkeiten gibt, dann bei zwei Würfeln $6 \cdot 6 = 36$. Die Wahrscheinlichkeit auf (6, 5) ist somit auch $\frac{1}{36}$. Bei einer Abfolge von Experimenten werden die Wahrscheinlichkeiten also mit einander multipliziert. Wenn wir dann zum Beispiel wissen wollen, wie wahrscheinlich es ist, bei einem Wurf mit zwei Würfeln 5 und 6 zu werfen, können wir dieses Experiment zerlegen in zwei Würfeln, so wie es bei Experiment ZWEI geschieht, und dann fortfahren. Man findet dann, dass die Wahrscheinlichkeit mit zwei Spielwürfeln einen Fünfer und einen Sechser (also Augensumme 11) zu werfen, $\frac{1}{18}$ beträgt.

Aufgabe 11. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei Experiment EINS keine gerade Zahl geworfen wird? Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei Experiment ZWEI kein gerade Zahl geworfen wird? Verallgemeinere, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei N Würfeln mit einem ehrlichen Spielwürfel keine gerade Zahl geworfen wird?

Folgende Aufgabe macht man am leichtesten mit einem Baumdiagramm, das ich im Unterricht erklären

werde – bei Bedarf, denn wenn alle es schon verstehen, werde ich nicht das Unnötige tun.

Aufgabe 12. Familie Svodorkovski fährt für ein Wochenende nach Italien, an die Amalfiküste. Obwohl sie meistens recht viel Glück haben, gibt es aber Samstag 5% Wahrscheinlichkeit auf Regen und Sonntag sogar 10% Wahrscheinlichkeit auf Regen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird diese Familie auch dieses Mal Glück haben, und keinen Regen erleben?

Aufgabe 13 (1). Was ist die Wahrscheinlichkeit bei Experiment ZWEI beim ersten Wurf einen Dreier zu werfen, beim zweiten Wurf aber nicht einen Dreier zu werfen? Überlege dir auch, was passiert, wenn wir die Reihenfolge umdrehen, oder eine andere Zahl wählen.

Folgendes sollte dir jetzt nicht mehr ganz fremd sein:

(D) Die Wahrscheinlichkeiten längst eines Baumdiagramms werden mit einander multipliziert. Wenn wir das Baumdiagramm von oben nach unten zeichnen, wird also horizontal addiert, aber vertikal multipliziert.

Aufgabe 13 (2). Betrachten wir ein Experiment, bei dem wir mit einem Würfel so lange würfeln, bis wir einen Sechser haben. Sei X die Zufallsvariable “wie lange wir würfeln müssen, bis wir einen Sechser gewürfelt haben”. (a) Beschreibe den Ereignisraum – also, was sind die Möglichkeiten für X ? (Kennst die diese Menge vielleicht unter einem natürlichen Namen?) (b) Berechne $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ und $P(X = 10)$. (c) Begründe, dass $P(X = k + 1) = \frac{1}{6} \cdot P(X = k)$. Interpretiere diese Regel zuerst vollständig! (d) Interpretiere und begründe folgende Regel $P(X > k) = \frac{1}{6^k}$ (e) Was passiert mit dem Wert von $P(X = k)$ wenn k immer größer gewählt wird? (f) BONUS: Begründe $1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6^k} = \frac{6}{5}$. Hinweis: Benutze obige Regel (B) und dividiere sie durch $\frac{5}{6}$. (g) BONUS-BONUS: Fahre ähnlich wie bei (f) fort und begründe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2}$.

Achtung: Die Aufgaben 13(f) und 13(g) werden uns später beim Thema Folgen sehr bekannt vorkommen.

Case Study. Stellen wir uns vor, es gibt eine Krankheit die nur bei eins auf eine Million Menschen vorkommt. Es gibt einen Test auf diese Krankheit: Der Test ist ziemlich sicher, denn falls du krank bist, wird der Test auch mit 99% Sicherheit sagen, dass du diese Krankheit hat. Nur ist dieser Test etwas ungenau: Bei den gesunden Menschen gibt es eine 5% Wahrscheinlichkeit, dass der Test ‘positiv’ ausfällt. Jetzt möchten wir folgendes Paradoxon verstehen: *Wenn jemand sich testen läßt, und das Testergebnis ist positiv, dann müssen wir uns noch gar keine Sorgen machen.*

(a) Berechne $P(\text{Krank}, \text{Test negativ})$, $P(\text{Gesund}, \text{Test negativ})$.

(b) Zeichne ein geeignetes Baumdiagramm.

(c) Berechne $P(\text{Test negativ})$ und $P(\text{Test positiv})$.

(d) Falls der Test positiv ist, sind nur noch zwei Ereignisse wichtig: (1) Krank und Test = positiv, (2) Nicht Krank und Test = positiv. Begründe, dass man sich bei einem positiven Testergebnis nicht direkt fürchten muss. Konkret, seien p_1 und p_2 die Wahrscheinlichkeiten auf (1) und (2). Berechne, dass die Wahrscheinlichkeit, dass man krank ist, wenn der Test positiv ist, $\frac{p_1}{p_1 + p_2}$ ist. Hinweis, stellen wir uns vor, wir betrachten eine Gruppe von einer Million Menschen. Berechne die erwarteten Anzahlen von Menschen, die (1) krank sind und einen positiven Testergebnis haben, und (2) die nicht krank sind und trotzdem ein positives Testergebnis haben.

(e) Besprich die Sinnhaftigkeit eines medizinischen Tests auf eine sehr seltsame Krankheit.