Erste Schularbeit Mathematik Klasse 7D WIKU am 12.11.2014

ANTWORTVORLAGE

Achtung: Teil 2 war noch in einem anderen Modus, daher muss man die Punkte umrechnen $\frac{Punkte}{46} = \frac{wirkliche\ \ Punkte}{24}$. Kompensationspunkte sind dann halt so wie angegeben; diese werden nicht umgerechnet. Bei Teil 1 entweder 0 oder 2 Punkte pro Aufgabe zu verdienen.

Zuerst Teil 1.

Aufgabe 1. Betrachten Sie die folgende Gleichung: $x^2 + 2mx + n = 0$, wobei $m, n \in \mathbb{R}$. Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweiligen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Die quadratische Gleichung $x^2+2mx+n = 0$ mit $m, n \in \mathbb{R}$ hat genau dann ______①______, wenn ______②______ gilt.

$m^2 - n < 0$ keine reelle Lösung
$m^2 - n = 0$ genau eine reelle Lösung
$m^2 - n > 0$ zwei reelle Lösungen

Aufgabe 2. Überlegen Sie, ob zur Berechnung der gegebenen Größen der Differenzenquotient oder der Differentialquotient geeignet ist. Kreuzen Sie jene(n) Aussagen an, für deren Berechnung der Differenzenquotient geeignet ist.

zu berechnende Größe	Differenzenquotient geeignet
Momentangeschwindigkeit eines Fahrrads.	
Die mittlere Geschwindigkeit eines Autos auf der Strecke Wien–Linz.	Ja
Die Steigung einer Tangente am Graphen von $f(x) = x^2-x^3$ im Punkt $(2\|-4)$.	
Die momentane Leistung eines Motorblocks, wenn er gerade voll auf Touren dreht.	
Die Steigung einer Sekante am Graphen einer Sinusfunktion zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$.	Ja

Aufgabe 3. Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ besitzt eine Lösung $x_1 = 3 - i\sqrt{5}$. Berechnen Sie die Koeffizienten p und q.

$x_2 = 3+i\sqrt{5}$. Damit rechnen wir aus: $(x-x_1)(x-x_2) = (x-3+i\sqrt{5})(x-3-i\sqrt{5}) = (x-3)^2+(\sqrt{5})^2 = x^2 - 6x + 14$, also $p = -6$ und $q = 14$.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie eine reelle Zahl a, sodass $|a + 10i| = 125$.

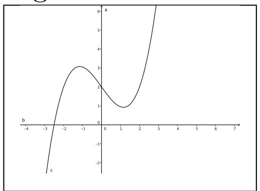
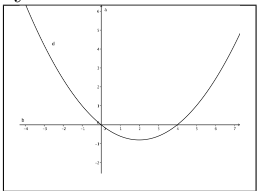
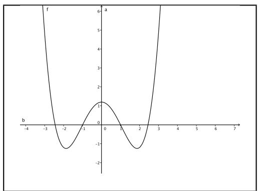
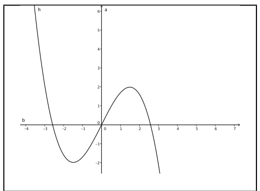
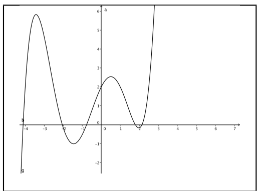
$a^2 + 10^2 = 125^2$ daraus folgt $a = \pm\sqrt{125^2 - 10^2} \approx \pm 124,6$. Eine davon reicht.

Aufgabe 5. Die Tangente im Punkt $(1|1)$ am Graphen der Funktion $f(x) = x^3$ hat Steigung 3. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $y = kx + d$ für diese Tangente.

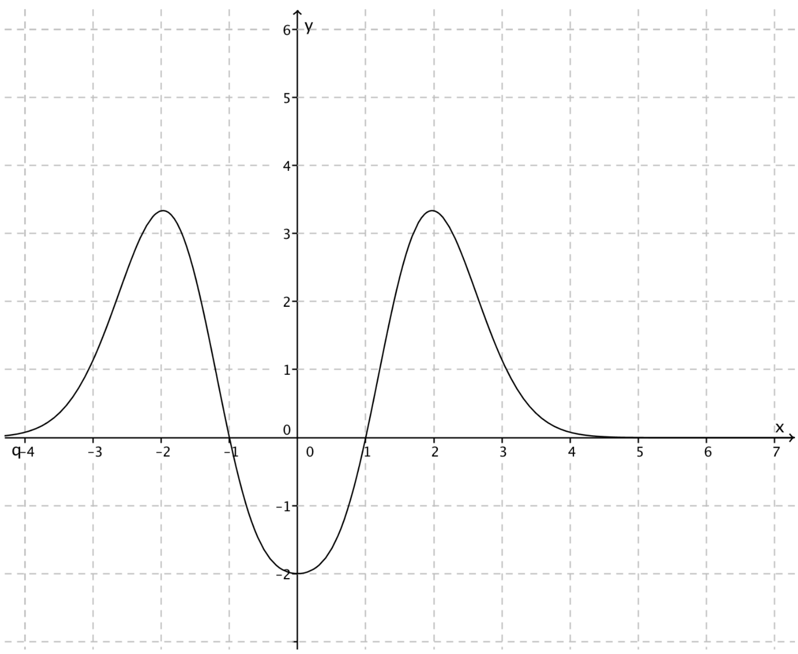
$k = 3$ $\qquad$ $d = -2$, denn damit $y = 3x - 2$ und also wenn $x = 1$ auch $y = 3 \cdot 1 - 2 = 1$, also $(1|1)$ liegt auf dem Graphen.

Aufgabe 6. Kreuzen Sie die 3 richtigen Aussagen an!	
1. ☒	Der Betrag von der komplexen Zahl $z = re^{i\alpha}$ mit $r > 0$ und $\alpha \in [0, 2\pi)$ ist r.
2. ☐	Die komplexen Zahlen mit Norm 3 bilden einen Kreis mit Radius 9.
3. ☐	Die komplex Konjugierte von $z = \frac{i}{1+2i}$ ist $\bar{z} = -\frac{i}{1+2i}$.
4. ☒	Die Gleichung $x^{12} - 1 = 0$ hat zwölf komplexe Lösungen.
5. ☒	Es gilt $e^{i\pi} = -1$.

Aufgabe 7. Hier unten sehen Sie fünf Graphen von Polynomfunktionen. Zwei davon sind von Polynomen von Grad 3, die anderen drei sind von einem anderen Grad. Kreuzen Sie die zwei Figuren von den Polynomen von Grad 3 an.

				
☒	☐	☐	☒	☐

Aufgabe 8. In der nebenstehenden Figur sehen Sie den Graphen einer Funktion f. Geben Sie für $-4 \leq x \leq 4$ die Intervalle an, in welchen die Funktion f monoton steigend ist.
(Nur) Richtig sind $[-4, 2]$ und $[0, 2]$, aber $(-4, 2)$ und $(0, 2)$ lasse ich gelten.



Aufgabe 9. Finden Sie die Polardarstellung der komplexen Zahl $z = 2 - 3i$ und achten Sie hierbei auf das Argument!
Betrag ist $\sqrt{13}$, Argument ist 303^o, denn $\tan(\varphi) = -\frac{2}{3}$, welches für zwei Winkel gilt, nur liegt der eine Winkel im zweiten Quadrant, und $2 - 3i$ liegt aber im vierten Quadrant. Daher $z = \sqrt{13}e^{i303^o}$.

Aufgabe 10. Finden Sie die zwei Lösungen von der quadratischen Gleichung $x^2 - 4x + 10 = 0$.
$x_\pm = 2 \pm i\sqrt{6}$

Aufgabe 11. Berechnen Sie die mittlere Steigung der Funktion $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{8}$ auf dem Interval $[2, 4]$.
$f(4) = 4$ und $f(2) = 0$, daher $\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = 2$.

Aufgabe 12. Betrachten Sie folgende Polynomfunktionen

$f_1(x) = 2x^2, \quad f_2(x) = x^2 + 2, \quad f_3(x) = x^4 + x^3, \quad f_4(x) = 3x^4 + 12, \quad f_5(x) = x - 1.$

Ordnen Sie jede Polynomfunktion ihrer ersten Ableitung zu und schreiben Sie f_1, f_2, f_3, f_4 und f_5 an die richtige Stelle!

(a) Die Polynomfunktion f_3 hat erste Ableitung $4x^3 + 3x^2$.

(b) Die Polynomfunktion f_2 hat erste Ableitung $2x$.

(c) Die Polynomfunktion f_4 hat erste Ableitung $12x^3$.

(d) Die Polynomfunktion f_1 hat erste Ableitung $4x$.

(e) Die Polynomfunktion f_5 hat erste Ableitung 1.

und jetzt Teil 2

Aufgabe 1. Betrachten Sie für $t \in [0, \infty)$ die komplexen Zahlen $z(t) = (t + 1)e^{i2\pi t}$. Die Menge aller $z(t)$ bildet eine Kurve in der komplexen Ebene.

(a) Drücken Sie die Norm von $z(t)$ in t aus. Die Norm ist $t + 1$, da $t > 0$.

(b) Finden Sie das Argument von $z(t)$. Das Argument steht im Exponent, da $t+1 \in \mathbb{R}$, also $2\pi t$ ist das Argument.

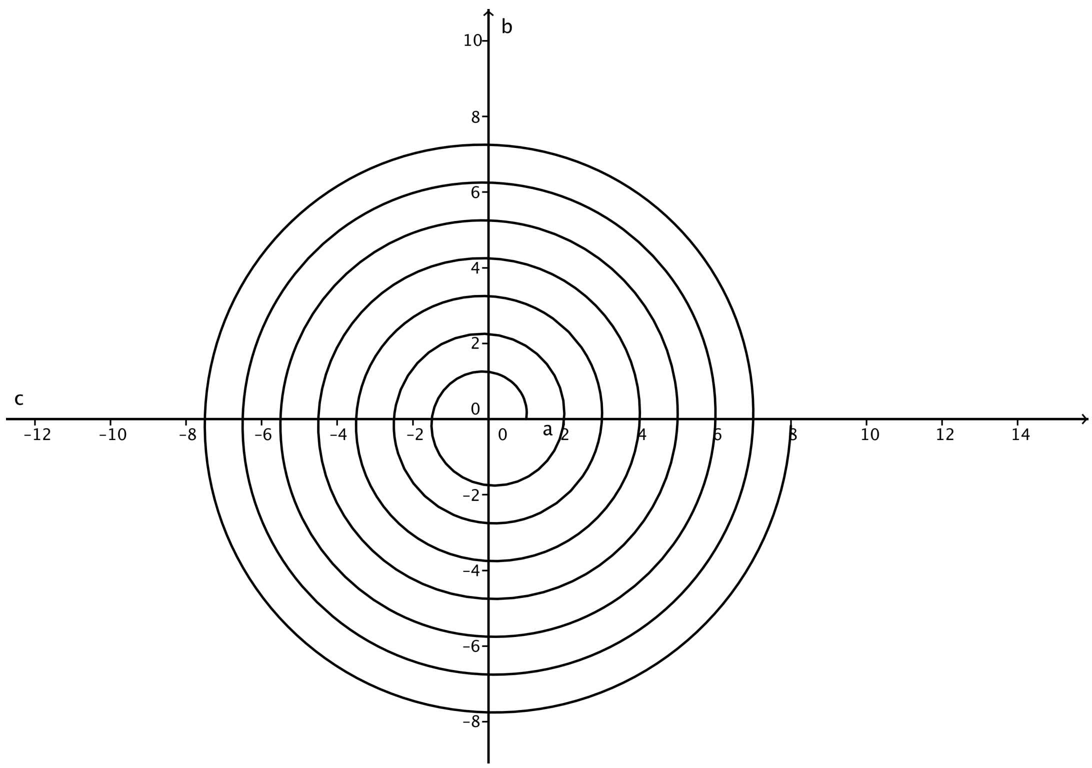
(c) Beschreiben Sie die Werte von t, sodass $z(t)$ reell ist. $\sin(2\pi t) = 0$, also $t = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$

(d) Beschreiben Sie die Werte von t, sodass $z(t)$ imaginär ist. $\cos(2\pi t) = 0$, also $t = \frac{1}{4}$, $t = \frac{3}{4}$, $t = \frac{5}{4}$, $t = \frac{7}{4}$, und so weiter.

(e) Fertigen Sie eine Zeichnung an, sodass die Kurve der Punkte $z(t)$ für t im Intervall $[0, 6]$ ersichtlich ist. Siehe Figur hier unten; es ist eine Spirale, denn das Argument wächst, und der Radius (die Norm) auch. Jede Umdrehung bedeutet, dass t um eins größer wird.

(f) Die Punkte g gegeben durch $\mathrm{Im}(z) = 2\mathrm{Re}(z)$. Bestimmen Sie, wie oft die Gerade g die Kurve der Punkte $z(t)$ für $t \in [0, 8]$ schneidet.

Für jedes Intervall $[n, n + 1]$ mit n eine natürliche Zahl, sieht man zwei Schnittpunkte. Daher gibt es 16 Schnittpunkte.



Aufgabe 2. Am Ende des Mittelalters war es eine Kunst, Kanonen zu bauen, die die Kugeln möglichst genau beim Feind landen lassen würden. In dieser Aufgabe studieren wir die Bahnen der Kugeln. Die Bahn einer Kugel kann durch zwei Gleichungen gegeben werden; es sei $x(t)$ die waagrechte Entfernung der Kugel von der Kanone und $y(t)$ die Höhe der Kugel. Der Parameter t ist hier die Zeit; $t = 0$ korrespondiert mit dem Zeitpunkt, wo die Kugel aus der Kanone rausfliegt. Nehmen wir an, $x(t)$ und $y(t)$ werden durch folgende Formeln gegeben:

$$x(t) = 150t\,, \qquad y(t) = 30t - 5t^2\,.$$

(a) Die horizontale Geschwindigkeit $v_x(t)$ ist durch $v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ gegeben. Finden Sie einen Term für $v_x(t)$. Differenzieren nach der Variable t ergibt: $v_x(t) = 150$.

(b) Die vertikale Geschwindigkeit $v_y(t)$ ist durch $v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$ gegeben. Finden Sie einen Term für $v_y(t)$ und bestimmen Sie $v_y(0)$. Differenzieren ergibt $v_y(t) = 30 - 10t$, also $v_y(0) = 30$.

(c) Am höchsten Punkt ist die vertikale Geschwindigkeit der Kugel Null. Bestimmen Sie die Zeit t, zu welcher die Kugel am höchsten Punkt ist, und die erreichte Höhe y_{max}.

$v_y(t) = 0$ bedeutet $30 - 10t = 0$, also $t = 3$, somit $y_{max} = y(3) = 45$.

(d) Beschreiben Sie, ob $v_y(t)$ eine monoton steigende Funktion, eine monoton fallende Funktion oder keine von den beiden ist. Begründe Sie ihren Standpunkt kurz.

$v_y(t)$ ist eine lineare Funktion mit negativer Steigung, also monoton fallend.

(e) Die Kugel landet, wenn für eine Zeit $t_1 > 0$ gilt $y(t_1) = 0$. Bestimme Sie die Zeit t_1, zu welcher die Kugel landet.

$y(t) = 0$ impliziert $30t - 5t^2 = 0$, also $t(30 - 5t) = 0$, also $t = 0$ (das ist der Start) oder $30 = 5t$, und somit $t = 6$. Die Kugel landet bei $t = 6$.

(f) Die obigen Formeln für $x(t)$ und $y(t)$ gelten nur, wenn wir die Luftreibung vernachlässigen. Geben Sie an, wie man an den Formeln sieht, dass die Luftreibung vernachlässigt wurde. Die Geschwindigkeit in x-Richtung ist konstant. Das kann nur, wenn es keine Reibung gibt. Auch ist die Beschleunigung in vertikaler Richtigung durch $a_y(t) = y''(t) = -10$ gegeben, genau die Schwerkraft. Somit wirkt keine andere Kraft, auch keine Reibungskraft. Ohne den Verweis auf die Funktionen keine Punkte hier.

Aufgabe 3.

Kubische Funktionen sind erheblich schwieriger, wenn es darum geht, die Nullstellen zu bestimmen. Die Extrema (also Minima oder Maxima) lassen sich aber mit den bekannten Methoden bestimmen. Wir betrachten dazu ein Beispiel $f(x) = x^3 + x^2 + x$, aber auch den allgemeinen Fall $k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a \neq 0, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Bekanntlich befinden sich die Extrema (also die Minima und Maxima) bei den Stellen, wo $f'(x) = 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion f keine Minima und Maxima besitzt.

$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Wenn wir lösen wollen $3x^2 + 2x + 1 = 0$, finden wir, dass die Diskriminante $D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -8$ kleiner als Null ist. Somit gibt es keine reelle Lösung, und somit keine reelle Zahl x sodass $f'(x) = 0$. Daher kann es auch kein Extremum geben.

(b) Finden Sie ein Kriterium (eine Gleichung reicht) für die Koeffizienten a, b, c und d, sodass die allgemeine kubische Funktion $k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a \neq 0, b, c, d \in \mathbb{R}$ keine Extrema hat.

Differenzieren von k ergibt $k'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Also $k'(x) = 0$ ist äquivalent mit $3ax^2 + 2bx + c = 0$. Diese Gleichung hat keine Lösung falls $(2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot c < 0$, also wenn $4b^2 - 12ac < 0$, also wenn $b^2 < 3ac$. Somit gibt es keine Extremstellen, wenn $b^2 < 3ac$. Tatsächlich sehen wir bei f, dass $a = b = c = 1$ und somit $b^2 = 1$ und $3ac = 3$, daher ist die Bedingung erfüllt.

BEURTEILUNGSBLATT TEIL II

Aufgaben und Punkteanzahlen			
Nr.	Erklärung	Punkte	von
1(a)			2
1(b)			2
1(c)			3
1(d)			3
1(e)			4
1(f)			4
2(a)			1
2(b)			3
2(c)			3
2(d)			4
2(e)			5
2(f)			3
3(a)			4
3(b)			5
Insgesamt			46

Um auf Skala-24 umzurechnen: Punkteanzahl mal 24, dann durch 46 dividieren. Das ergibt immer eine Zahl zwischen 0 und 24. Die Kompensationspunkte sind so, wie man sie verdienen kann, also das bleiben die vier Punkte so wie im Text angegeben.