Dritte Schularbeit Mathematik
Klasse 7D WIKU am 02.03.2015

Punkte im ersten Teil: ____________________

Punkte im zweiten Teil: ____________________

Davon Kompensationspunkte: ____________________

Note: ____

Notenschlüssel:
Falls die Summe der erzielten Kompensationspunkte im zweiten Teil und des ersten Teils weniger als 16 ist, so ist die Note `Nicht Genügend`. Falls diese Summe 16 oder mehr beträgt, dann wird folgender Notenschlüssel benutzt:

NOTENSCHLÜSSEL	
41 - 48 Punkte	Sehr Gut (1)
33 - 40 Punkte	Gut (2)
25 - 32 Punkte	Befriedigend (3)
16 - 24 Punkte	Genügend (4)

Aufgabe 1. (2P) **Rationale Zahlen**. Gegeben sind einige Aussagen über rationale Zahlen.

Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussagen an!	
1. ☐	Jede rationale Zahl besitzt eine endliche Dezimaldarstellung.
2. ☐	Zahlen der Form $\sqrt{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ liegen nie in $\mathbb{N}$.
3. ☒	Zwischen zwei rationalen Zahlen liegt stets eine weitere rationale Zahl.
4. ☒	Keine irrationale Zahl hat eine periodische Dezimaldarstellung.
5. ☐	Im Intervall $[0, 1]$ gibt es endlich viele rationale Zahlen.

Kommentar zu Aufgabe 1:

(1) Nimm zum Beispiel $\frac{1}{3} = 0,3333\cdots$.

(2) Nimm zum Beispiel $n = 4$, dann $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N}$.

(5) Es gibt unendlich viele Bruchzahlen von der Form $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ und $a \leq b$. Betrachte zum Beispiel $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

- -

Aufgabe 2. (2P) **Radioaktiver Zerfall**. Eine Probe radioaktiven Materials enthält 10^6 Atome. Diese Atome zerfallen laut einer exponentiellen Abnahme. Nach 24 Stunden ist die Hälfte der Atome zerfallen.

Geben Sie an, wie groß die stündliche prozentuelle Abnahme ist!

Jede Stunde nimmt die Anzahl radioaktiver Atome um $\underline{2,8(5)}$ % ab.

Kommentar zu Aufgabe 2:

(1) Exponentiell, also nach $t = 1h = \frac{1}{24}Tag$ ist noch $\sqrt[24]{0,5} = 0,9715\cdots$ also $97,15\%$ Prozent übrig. Daher sind nach einer Stunde 2,8% zerfallen.

(2) $N(t) = a \cdot b^t$, mit t Zeit in Stunden. $a = N(0) = 10^6$, aber es geht um b: $b^{24} = 0,5$, also $b = \sqrt[24]{0,5} = 0,9715$. Also $N(1) = a \cdot (0,9715)^t$. Somit fallen jede Stunde $100 - 97,15 = 2,85$ Prozent.

- -

Aufgabe 3. (2P) **Quadratische Gleichung mit Parameter**. Gegeben ist die Gleichung

$$(2x - 3)^2 + c = 0 \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Zwei Möglichkeiten:

(1) Ist $c = 0$, dann besitzf die Gleichung genau eine Lösung.

ODER

(2) Ist $c < 0$, dann besitzt die Gleichung zwei reelle Lösungen.

Kommentar zu 3:

Jede Gleichung von der Form $(ax - b)^2 = 0$ hat genau eine Lösung. Ausschreiben ist hier nicht besonders elegant. Ein Quadrat ist nur Null, wenn das Quadrierte schon Null ist. Daher folgt aus $(ax - b)^2 = 0$ schon direkt $ax - b = 0$.

Jede Gleichung vom Typ $X^2 - a = 0$ hat zwei reelle Lösungen für positive a.

- -

Aufgabe 4. (2P) **Ermitteln einer Termdarstellung**. Gegeben ist die Funktion

$f(x) = x^2 + bx + c$ mit b, c reelle Zahlen.

Der Graph von f geht durch den Punkt $(1|0)$ und hat dort die Steigung -2. Ermitteln Sie die Parameter b und c und geben Sie die zugehörige Termdarstellung von f an.

$b = -4, \quad c = 3, \;\; f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3).$

Kommentar zu 4:

Differenzieren ergibt $f'(x) = 2x + b$.

Aus $f(1) = 0$ folgt $1 + b + c = 0$. Aus $f'(1) = -2$ folgt $2 + b = -2$ also $b = -4$. Daher $1 - 4 + c = 0 \Longrightarrow c = 3$.

- -

Aufgabe 5. (2P) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(2x)$. Entscheiden Sie, welche der untenstehenden Aussagen auf f zutreffen.

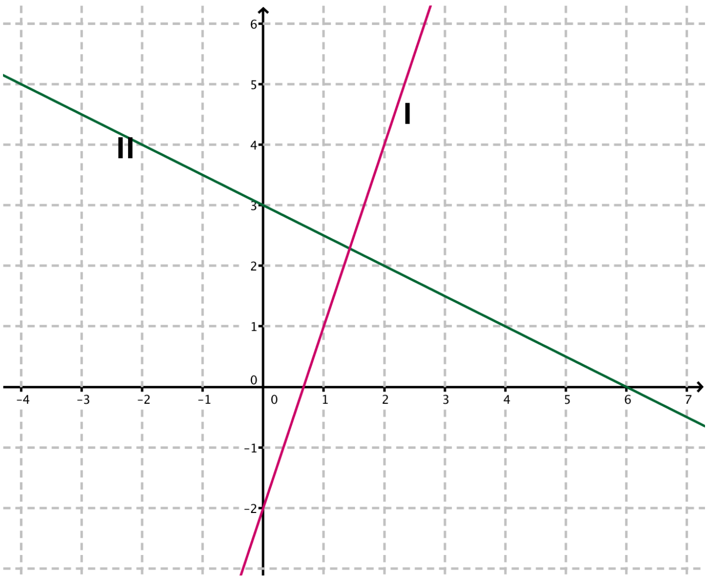
Aussage	Trifft zu
Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.	Ja
Die Tangente an der Stelle $x = \pi$ hat Steigung 0.	
Die Funktion hat eine Nullstelle bei $x = \frac{\pi}{4}$.	
Der Graph der Funktion hat eine Rechtskrümmung.	
Die Periode ist π.	Ja

Kommentar zu Aufgabe 5:

(2) $2\cos(2\pi) = 2$. (3) $\sin(2\frac{\pi}{4}) = 1$. (4) Der Graph hat Bereiche mit Linkskrümmung und Bereiche mit Rechtskrümmung. Daher kann man nicht sagen, dass der Graph eine Rechtskrümmung hat. NB $f''(x) < 0$ gilt ja nicht immer.

- -

Aufgabe 6. (2P) **Gleichungssysteme**. Gegeben ist folgende grafische Darstellung:

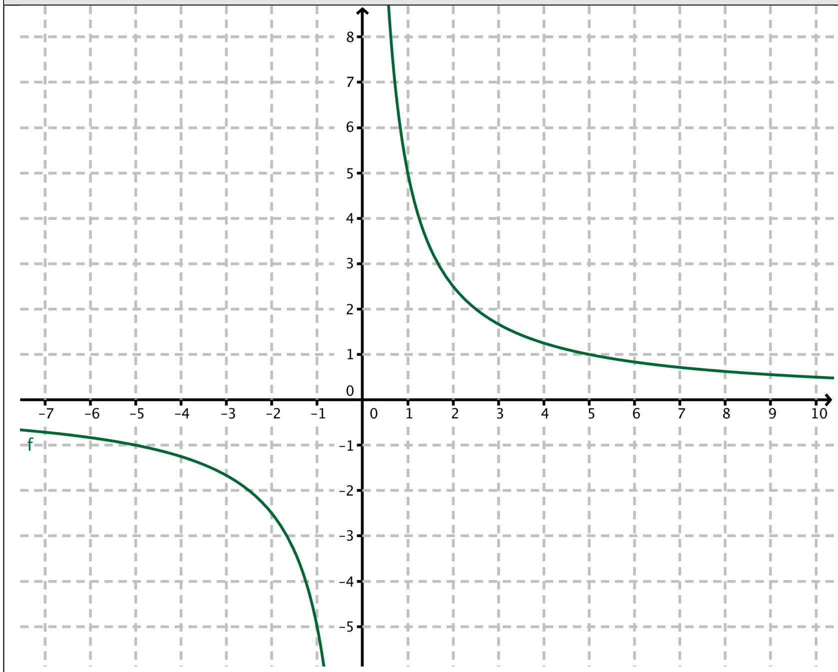


Geben Sie ein dieser Grafik entsprechendes lineares Gleichungssystem mit den Variablen x und y sowie die Lösung dieses Gleichungssystems an!

Gleichungssystem	I: $y = 3x - 2$
	II: $y = -\frac{1}{2}x + 3$
Lösung	$x = \frac{10}{7} \quad y = \frac{16}{7} = 2\frac{2}{7}$

- -

Aufgabe 7. (2P) **Funktionsdarstellungen**. Fünf der sechs Darstellungen beschreiben ein und dieselbe Funktion, eine passt jedoch nicht dazu.

Kreuzen Sie an, welche Darstellung nicht dazupasst!	
	☐
$f(x) = \frac{5}{x}$	☐
Jeder Zahl $x \in \mathbb{R}^*$ wird den Kehrwert ihren Fünffaches zugeordnet.	☒
f beschreibt eine indirekte Proportionalität und $f(5) = 1$.	☐
$f(x) = 5 \cdot x^{-1}$, $x \in \mathbb{R}^*$	☐
$x \cdot f(x) = 5$, $x \in \mathbb{R}^*$	☐

Kommentar zu 7:

Der Kehrwert ihren Fünffaches bedeutet $\frac{1}{5x}$. Das Fünffache des Kehrwertes ist $\frac{5}{x}$.

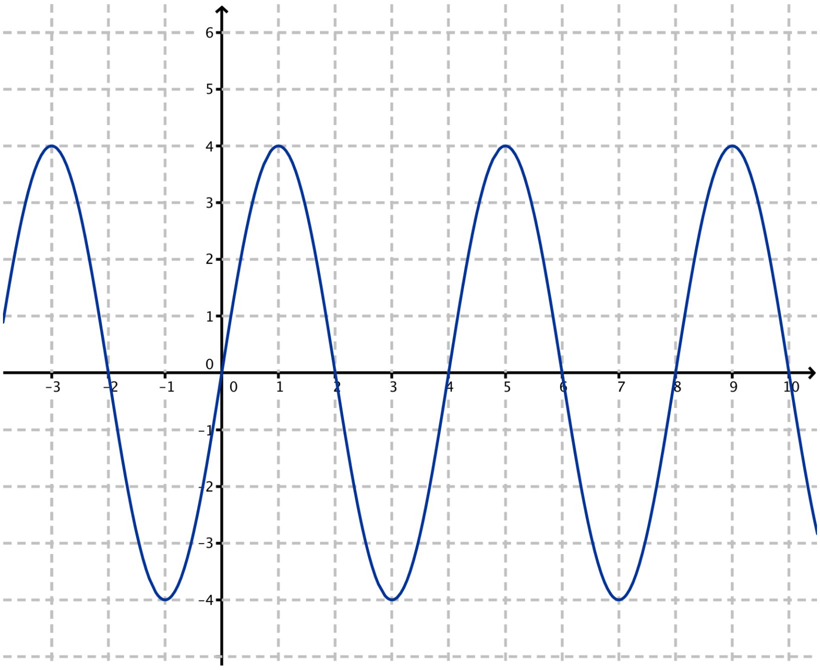
- -

Aufgabe 8. (2P) **Freier Fall**. Es sei $s(t)$ die Länge des beim freien Fall nach t Sekunden zurückgelegten Weges und $v(t)$ die dazugehörige Geschwindigkeit nach t Sekunden.

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!	
1. ☒	$s'(t) = \lim_{u \to t} \frac{s(u)-s(t)}{u-t}$
2. ☐	$v'(t) = \lim_{u \to t} \frac{s(u)-s(t)}{u-t}$
3. ☐	$s'(t) = \lim_{u \to t} \frac{v(u)-v(t)}{u-t}$
4. ☒	$v'(t) = \lim_{u \to t} \frac{v(u)-v(t)}{u-t}$
5. ☒	$s'(t) = v(t)$

- -

Aufgabe 9. (2P) **Parameter gesucht bei einer Sinusfunktion**. Gegeben ist der untenstehend abgebildete Graph einer Funktion f mit $f(x) = a\sin(bx)$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{R}$.



Bestimmen Sie die Parameter a und b anhand des Graphen!

$a = 4$

$b = \frac{\pi}{2}$

Kommentar zu 9:

Die Periode ist 4. Daher $4 = \frac{2\pi}{b}$ und somit $b = \frac{2\pi}{4}$.

- -

Aufgabe 10. (2P) **Zweite Ableitungen**. Gegeben sind vier reelle Funktionen. Ordnen Sie jede Funktion der richtigen zweiten Ableitung zu!

Funktionen	
$f(x) = x^{-1} - \sin(x)$	A
$f(x) = x + \sin(x)$	B
$f(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$	C
$f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$	D

Ableitungen	
$f''(x) = -\sin(x)$	B
$f''(x) = \sin(x) + \frac{2}{x^3}$	A
$f''(x) = -\frac{\sin(0{,}5 \cdot x)}{2}$	D
$f''(x) = -2 \cdot \sin(2x)$	C
$f''(x) = -2 \cdot \sin(x)$	
$f''(x) = \sin(x) + \cos(x)$	

- -

Aufgabe 11. (2P) **Ableitung einer Polynomfunktion.** Vervollständigen Sie durch Ankreuzen die Aussage so, dass sie korrekt ist!

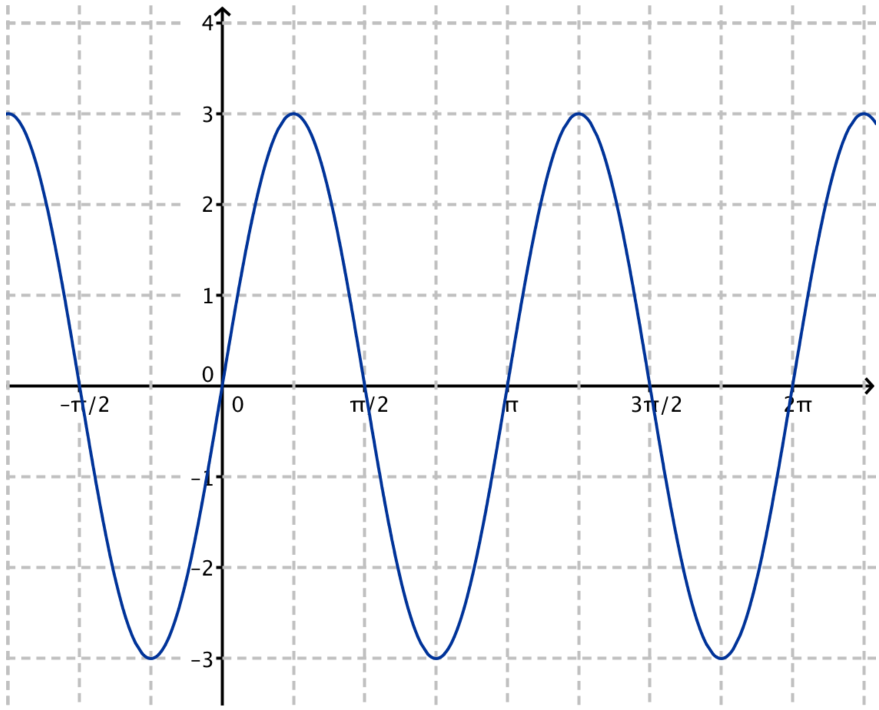
Für die Funktion $f(x) =$ ______①______ ist $f'(x) =$ ______②______.

Möglichkeiten für ①	
$-x^4 + 2x^2 + x + 7$	☒
$-x^4 - 2x^2 - x - 7$	☐
$x^4 + 2x^2 + x + 7$	☐

Möglichkeiten für ②	
$-4x^3 + 4x + 7$	☐
$-4x^3 + 4x + 1$	☒
$x^4 - 2x + 1$	☐

- -

Aufgabe 12. (2P) **Änderungen und Änderungsraten**. Die untenstehend abgebildete Grafik zeigt den Graphen der Funktion g mit $g(x) = 3\sin(2x)$. Kreuzen Sie die Aussagen an, die auf die Funktion g zutreffen!



Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!	
1. ☒	Die mittlere Änderungsrate von g auf $[0, \frac{\pi}{4}]$ beträgt $\frac{12}{\pi}$.
2. ☒	Die momentane Änderungsrate von f an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ ist kleiner als die an der Stelle 0.
3. ☐	Die mittleren Änderungsraten in $[0; \frac{\pi}{4}]$ und $[0; \frac{5\pi}{4}]$ sind gleich groß.
4. ☒	Die absoluten Änderungen in $[0; \frac{\pi}{4}]$ und $[0; \frac{5\pi}{4}]$ sind gleich groß.
5. ☐	Die Steigung der Sekante in $[0; \pi]$ ist größer als 1.

Kommentar zu Aufgabe 12:

(1) $\Delta y = 3$ und $\Delta x = \frac{\pi}{4}$ also $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{\pi/4} = \frac{12}{\pi}$.

(2) Bei $x = \frac{\pi}{2}$ ist die Steigung negativ. Bei $x = 0$ ist die Steigung positiv. Also ist die Aussage richtig!

(3) Δy ist für beide Intervalle gleich groß, aber da Δx anders ist, stimmen die mittleren Änderungsraten nicht überein.

(4) Siehe (3), da Δy bei beiden Intervallen gleich groß ist, ist diese Aussage richtig.

(5) Die Steigung dieser Sekante ist Null, dann $f(0) = f(\pi)$ sodass $\Delta y = 0$.

Dritte Schularbeit Mathematik Klasse 7D WIKU am 02.03.2015

TEIL II

Aufgabe 1.
In den ersten fünf Stunden nach Verabreichung des Medikaments Asporon (ein schmerzenlinderndes Mittel, das per Spritze direkt in die Blutbahn injiziert wird) kann die Konzentration Asporon durch folgende Formel gut angenährt werden:

$$K(t) = 30te^{-0,8t} \qquad\qquad 0 \le t \le 5\,.$$

In dieser Formel ist t die Zeit in Stunden nach der Verabreichung und $K(t)$ ist die Konzentration Asporon in μg pro Liter. Nach 5 Stunden erfolgt der Abbau des Medikaments linear.

(a) (2P Kompensationspunkte) Berechnen Sie, wie groß die maximale Konzentration Asporon im Blut, und wann diese maximale Konzentration erreicht wird.

(b) (2P) Bestimmen Sie, zu welcher Zeit, das Medikament am stärksten abgebaut wird.

(c) (2P) Der lineare Abbau wird durch die Tangente an der Stelle $t = 5$ beschrieben. Das heißt, dass der lineare Abbau durch eine Gerade beschrieben wird, die genau der Tangente im Punkt $(5|K(5))$ entspricht. Bestimmen Sie die Geradengleichung diesen linearen Abbaus!

(d) (2P) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem das Medikament Asporon komplett abgebaut ist.

(e) (2P) Die Nebenwirkungen (Kopfschmerzen und Herzrythmusstörungen) können gefährlich werden, wenn die Konzentration die 60 μg pro Liter übersteigt. Schätzen Sie mittels Berechnung ab, wie viele Abreichungen höchstens auf einmal zugedient werden können, ohne dass die 60 μg pro Liter überstiegen werden.

(a) $K'(t) = e^{-0,8t}(30 - 24t)$. Also $K'(t) = 0$ genau dann wenn $30 = 24t$ also $t = 1,25$ Stunden. Dann $K(1,25) = 13,79\mu g$.

(b) $K''(t) = e^{-0,8t}(19,2 - 48t)$. Also $K''(t) = 0$ genau dann wenn $48t = 19,2$, daher wenn $t = 2,5$.

(c) $K'(5) = e^{-4} \cdot (30 - 120) = -90e^{-4}$. Und $K(5) = 150e^{-4}$ Daher $y = -\frac{90}{e^4}t + d$, und $K(5) = -\frac{90}{e^4}5 + d$ ergibt $d = \frac{600}{e^4}$. Somit $y = -\frac{90}{e^4}t + \frac{600}{e^4} = \frac{600-90t}{e^4}$.

(d) Zu lösen: $\frac{600-90t}{e^4} = 0$, also $t = 600/90 \approx 6,7$.

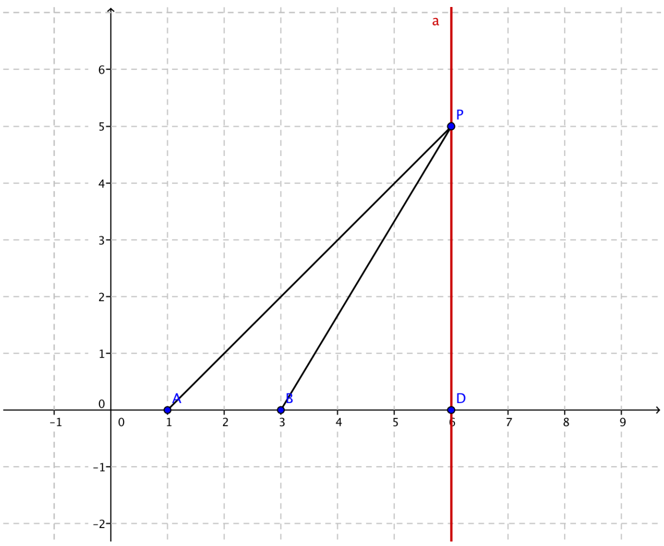
(e) Die maximale Konzentration ist (siehe a) etwa 14 μg pro Liter. Das heißt, dass 4 Spritzen auf einmal wohl als maximale Konzentration $4 \cdot 14 = 56\mu g$ pro Liter ergeben werden. Vier ist also die erwartete maximale Zahl von Verabreichungen.

Aufgabe 2.
Betrachten Sie folgendes geometrisches Problem – sehen Sie auch Figur hier unten. Gegeben ist die Gerade $a:\ x = 6$ und die zwei Punkte $A = (1|0)$ und $B = (3|0)$. Für jeden Punkt $P = (6|y)$ auf der Geraden a kann man den Winkel $\angle BPA$ bestimmen. Die Frage ist jetzt, für welchen Punkt $P = (6|y)$ mit $y > 0$ auf der Geraden a ist dieser Winkel am größten? Wir teilen Ihnen das Problem wie folgt auf:

(a) (2 Kompensationspunkte) Drücken Sie $\tan(\angle DPB)$ und $\tan(\angle DPA)$ in y aus, wobei $D = (6|0)$.

(b) (2 Punkte) Benutzen Sie $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$ um mithilfe von (ii) einen Ausdruck für $\tan(\angle BPA)$ zu finden.

(c) (2 Punkte) Maximalisieren Sie jetzt den Ausdruck, den Sie bei (b) erhalten haben, denn um den Winkel zu maximalisieren, kann man auch den Tangens maximalisieren. Geben Sie die y-Koordinate vom Punkt an, an dem der Winkel $\angle BPA$ maximal ist!



(a) $\tan(\angle DPB) = \frac{3}{y}$ und $\tan(\angle DPA) = \frac{5}{y}$.

(b) $\tan(\angle BPA) = \dfrac{\frac{5}{y} - \frac{3}{y}}{1 + \frac{15}{y^2}} = \dfrac{2y}{y^2 + 15}$.

(c) Diesen Ausdruck Differenzieren nach y ergibt dann die Gleichung $\frac{30-2y^2}{(15+y^2)^2} = 0$ also $2y^2 = 30$ und somit $y = \sqrt{15}$.

Nebenbemerkung: Bei den Winkeln war ein nicht so schöner Schreibfehler: $\angle PDB$ und $\angle PDA$ sind natürlich rechte Winkel. Man bemerkt aber leicht, dass die Winkel $\angle DPB$ und $\angle DPA$ die wichtigen Winkel sind.

Aufgabe 3.
Die Firma 'Rote Kuh' aus Pfefferburg stellt ein Getränk her. Dieses Getränk wird in zylinderförmigen Dosen mit Höhe $8cm$ und Durchmesser $5cm$ verkauft. Dabei darf das Volumen der Dosen aber nur für 95% gefüllt werden, denn sonst kann eine Dose zu leicht platzen. Die Herstellung erfolgt in Einheiten; jede Einheit kann zu $8 \cdot 10^5$ Dosen pro Tag herstellen.

(a) (2P Kompensationspunkte) Berechnen Sie, wie viel Liter Rote Kuh eine Einheit pro Tag herstellen kann.

In China vermutet die Firma eine Marktlücke und hat seit zwei Jahren dort auch ihre Produkte verkauft. Im Jahr 2013 wurden 4.780.000 Dosen Rote Kuh verkauft und im Jahr darauf waren es 7.860.000.

(b) (2P) Nehmen Sie an, der Verkauf wird sich linear fortsetzen. Berechnen Sie, wie viele Dosen dann im Jahr 2020 voraussichtlich in China verkauft werden.

(c) (2P) Nehmen Sie an, der Verkauf wird sich exponentiell fortsetzen. Berechnen Sie, wie viele Dosen dann im Jahr 2020 voraussichtlich in China verkauft werden.

Rote Kuh gibt es in den Varianten Normal, mit etwa 15 Gramm Zucker pro Liter, und Light, mit etwa 4 Gramm Zucker pro Liter. Da man in China im Allgemeinen ein etwas weniger süßes Getränk bevorzugt, macht man für China eine spezielle Mischung; man mischt Rote Kuh Normal und Rote Kuh Light im Verhältnis 3 : 7.

(d) (2P) Berechnen Sie, wie viel Gramm Zucker in einer Dose Rote Kuh von der chinesischen Variante enthalten ist.

(a) $V = \pi r^2 h = 50\pi cm^3$. Davon 95% sind $47,5\pi cm^3$. Also die angegebene Menge an Dosen ergeben $380\pi \cdot 10^5 cm^3 = 380\pi 10^2 L \approx 119000L$.
(b) Zunahme pro Jahr 3080000 also Antwort ist $4780000 + 7 \cdot 3080000 = 26340000$.
(c) $y = N_0 b^t$ und $N_0 = 4780000$ und $b = \frac{7860000}{4780000} \approx 1,64$. Daher $y = 4780000 \cdot \left(\frac{786}{478}\right)^7 \approx 155$ Million.
(d) Da $3 + 7 = 10$ haben wir $0,3 \cdot 15 + 0,7 \cdot 4 = 7,3$ Gramm pro Liter. Dies multiplizieren mit dem Volumen einer Dose ergibt etwa 1,09 Gramm pro Dose.