

Fehleranalyse und wichtiges Wissen

Fehler, die zu vermeiden sind & Wissen, das zu wissen ist

20. Dezember 2014

Wissen 1. Der Satz des Pythagoras ist in allen Formen zu wiedererkennen. In einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a , b und Hypotenuse c gilt $a^2 + b^2 = c^2$. Es gilt $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$. Achtung, man schreibt wohl $\sin^2(x)$ für $\sin(x)^2 = \sin(x) \cdot \sin(x)$, und ähnlich bei $\cos(x)$. Schlussfolgerung dieses Satzes ist, dass jeder Vektor von der Form $(A \cos(x) | A \sin(x))$ Norm $|A|$ hat, denn tatsächlich $A^2 \cos(x)^2 + A^2 \sin(x)^2 = A^2$, und daher ist der Norm $|A| = \sqrt{A^2}$. Also, jeder Vektor von der Form $(\cos(\alpha) | \sin(\alpha))$ ist ein Einheitsvektor.

Wissen 2. Bei den Funktionen $A \cdot \sin(Bx) + C$ und $A \cos(Bx) + C$ ist die Periode $\frac{2\pi}{B}$. Daher ist die Frequenz $\frac{B}{2\pi}$. Periode und Frequenz sind Kehrwerte von einander. Periode ist, wie lange eine Schwingung / ein Umlauf dauert, Frequenz ist, wie viel Schwingungen/Umläufe pro Sekunde es gibt.

Fehler 1. Wenn man eine Nullstelle sucht, niemals mit dem TR einfach ausprobieren. Damit verlierst du Zeit, und die Chancen auf Erfolg stehen schlecht. Mache dann eine andere Aufgabe.

Fehler 2. $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ und $(A - B)^2 = A^2 - B^2$ sind die besten Methoden, ein Schnellabo auf Nichtgenügend zu bekommen.

Wissen 3. $(A \pm B)^2 = A^2 + B^2 \pm 2AB$ und $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

Fehler 3. Etwas mal Null ist Null, also $(x^2 - 3x + 4) \cdot 0 = 0$, nicht $x^2 - 3x + 4$. Wenn dies so wäre, dann auch $3 \cdot 0 = 3$, was man schon als Unsinn wiedererkennen sollte.

Wissen 4. Wenn ein Bruchterm $\frac{P}{Q}$ Null ist, dann muss P Null sein.

Wissen 5. Man muss in Bogenmaß einige Werte auswendig wissen, denn das spart dir Denkzeit: Null Grad ist Null Bogenmaß, und 360 Grad sind 2π Bogenmaß. Lerne auch folgende Werte: $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ und $180^\circ = \pi$.

Wissen 6. Die Funktionen \sin , \cos und \tan machen aus einem Winkel ein Verhältnis, eine Zahl. Ihre inversen Funktionen machen also aus einer Zahl einen Winkel. Daher hat $\arctan(\pi)$ oder ähnliches in der Regel keinen Sinn.

Wissen 7. Lerne einige Werte von Cosinus, Sinus und Tangens auswendig:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

Welche du auswendig lernst, kannst du einigermaßen selbst aussuchen, denn zB $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ sodass du dir eine Reihe sparen kannst. Auch laufen die Werte von Sinus und Cosinus sozusagen in anderer Richtung, was man sich auch leicht merken kann. Auch sind die Werte von Sinus eine recht einfache Reihe $0, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$. Achtung $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Fehler 4. Was nicht direkt falsch ist, ist für Funktionen von der Form $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ und $\frac{x^3-x^2}{4}$ die Quotientenregel anzuwenden. Nur machst du dann schneller einen Fehler, denn das Ganze wird dann rechnerischer. Niemals vergessen, $\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$. Diese Zahlen im Nenner sind also nichts Großes, nur wie Zahlen mit denen multipliziert wird.

Fehler 5. Bogenmaß oder Grad auf dem Taschenrechner nicht vertauschen. Das ergibt dann immer falsche Antworten.

Fehler 6. Keine Panik bekommen, wenn ein Intervall gegeben ist. Nur am Ende kontrollieren, ob deine Werte für x im Intervall liegen.

Fehler 7. $\ln(A + B) \neq \ln(A) + \ln(B)$

Wissen 8. $\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B)$, $\ln(A^r) = r \ln(A)$, $\ln(A/B) = \ln(A) - \ln(B)$, $\ln(1) = 0$, $\ln(0)$ existiert nicht, $\ln(e) = 1$.

Fehler 8. Umformungen von Gleichungen darf nicht mehr schief gehen! $3e^x = 2$ löst man nicht, indem man 3 links und/oder rechts addiert. Ähnliche Fehler sorgen für schlechte Noten.

Wissen 9. Mache mit einem TR oder mit Google, oder mit irgendetwas die Graphen von Sinus, Cosinus, Tangens, e^x , Logarithmus, e^{-x^2} , $\frac{1}{1+x^2}$ und lerne diese Formen auswendig.

Fehler 9. Klammern!!! Achtung, wie man sie setzt!!!

Fehler 10. $\sin(x)^2 \neq \sin(x^2)$. Mache bitte die Graphen von $\sin(x^2)$ und von $\sin^2(x)$ und

schaue, wie unterschiedlich sie sind.

Wissen 10. $\cos(x) = \sin(x)$ impliziert $\tan(x) = 1$ und das passiert bei $x = \frac{\pi}{4}$ modulo π , also $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Wissen 11. Norm, Betrag oder Größe eines Vektors sind alle dasselbe. Mit Pythagoras rechnet man das aus.

Fehler 11. Beim Skalarprodukt nicht nur addieren:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} \quad (1)$$

sondern

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd \quad (2)$$

Wissen 12. Normal auf einander stehen, heißt Skalarprodukt ist Null.

Wissen 13. Wenn eine Funktion von einem Parameter abhängt, wie $f_a(x) = x^2 + ax + 4$ gibt es ein paar Möglichkeiten: Diskriminante benutzen, Differenzieren, oder auf ähnliche Weise auf eine Gleichung kommen. Achtung: Der Parameter a ist nicht wie ein x zu betrachten, sondern, für jeden Wert von a gibt es eine Funktion. Somit hast du eine Familie von Funktionen.

Fehler 12. Die Eigenschaften von e^x und $\ln(x)$ wurden vergessen ...

Wissen 14. Lineare Funktionen $f(x) = kx + d$ erfüllen $f(x+1) - f(x) = k$.

Wissen 15. Lineare Funktionen $f(x) = kx + d$ erfüllen $f'(x) = k$.

Fehler 13. x - und y -Achse nicht verwechseln. Steigung Null \Rightarrow parallel zu x -Achse; Parallel zu y -Achse bedeutet Steigung unendlich.

Wissen 16. $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ bedeutet Minimum bei x ; $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ bedeutet Maximum bei x .

Wissen 17. Der Fall $f''(x) = f'(x) = 0$ ist so ein Diskussionsfall. Manche Bücher werden sagen, ein x mit $f'(x) = 0$ ist ein Extremum, manche nicht. Ich finde dass es nicht eindeutig ein Extremum ist, aber wichtiger ist, zu wissen, dass dies ein Diskussionsfall ist.

Bei Matura und SA also immer auf sicher gehen, und solche Fälle umgehen. Wie sie bei der Matura solche Fälle bewerten, weiß ich noch nicht sicher.

Fehler 14. Niemals f und f' verwechseln.

Fehler 15. Die Ableitung von etwas wie Sinus hat immer ein Cosinus dabei. Also, Sinus mit Ableitung wieder etwas wie Sinus ist mit Sicherheit falsch.

Fehler 16. Wenn du m von 5 ankreuzen musst, dann bekommst du sicher Null Punkte, wenn du mehr oder weniger als m ankreuzt. Also, wenn die Angabe besagt "Kreuzen Sie die 3 richtigen Aussagen an" dann kreuzt du 3 Aussagen an, nicht 2, nicht 4, nicht 1 und nicht 5.

Wissen 18. $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$ und daher $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.

Wissen 19. Die Parameter A , B , C in $A \sin(Bx) + C$ oder $A \cos(Bx) + C$ sind zu verstehen: A ist die Auslenkung (falls positiv, sonst $|A|$), B besagt, wie schnell es auf und ab geht, denn die Periode ist $\frac{2\pi}{B}$ und C ist die mittlere Höhe - die Höhe, auf der die Wendepunkte liegen.

Wissen 20. Man kann Sinus und Cosinus verschieben: $\sin(x + \delta)$ ist wie $\sin(x)$, nur um δ nach links verschoben - tatsächlich ist das Argument Null wenn $x = -\delta$. Achtung wenn $\delta < 0$, denn dann ist die Verschiebung nach rechts, und zwar um $|\delta|$.

Wissen 21. Es gilt $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ und $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$.

Wissen 22. Das Lösen von Gleichungen mit e^x und e^{-x} geht etwa so: Schieb alles mit e^x und e^{-x} auseinander. Multipliziere dann mit e^x , sodass e^{-x} wegfällt, denn $e^x \cdot e^{-x} = 1$. Dann hast du eine Gleichung mit e^{2x} und e^x , was wie eine quadratische Gleichung ist, denn e^{2x} ist das Quadrat von e^x . Ein Beispiel:

$$\begin{aligned} 3e^{3x} + 4e^{-3x} + 5 &= 2e^{3x} - e^{-3x} + 11 \implies \\ e^{3x} + 5e^{-3x} - 6 &= 0 \implies \\ e^{6x} - 6e^{3x} + 5 &= 0 \implies \\ (e^x)^2 - 6(e^x) + 5 &= 0 \implies \\ e^x \in \{1, 5\} &\implies \\ x \in \{0, \ln(5)\} & \end{aligned} \tag{3}$$

Ich weiß noch nicht, wie viel davon Grundwissen bei der Matura ist, aber ich will mal auf 'Nummer Sicher' gehen.