W 13

Produktregel

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= g(x)\cdot h(x) \\ f'(x) &= g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \end{aligned}}$$

Bsp (1) $f(x) = x^2 = x\cdot x \qquad g(x) = x \qquad h(x) = x$

$\Rightarrow f'(x) = 1\cdot x + x\cdot 1 = x + x = 2x$ ✓

(2) $f(x) = x^3 = x^2\cdot x \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = x$

$\Rightarrow f'(x) = 2x\cdot x + x^2\cdot 1 = 2x^2 + x^2 = 3x^2$ ✓

(3) $f(x) = g(x)^2 \Rightarrow f'(x) = g'(x)g(x) + g(x)g'(x) =$
$= 2\cdot g'(x)\cdot g(x)$

Begründung: $f'(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \dfrac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$ und

$$\begin{aligned} f(x+\epsilon) - f(x) &= g(x+\epsilon)\cdot h(x+\epsilon) - g(x)\cdot h(x) \overset{\text{"}+0\text{"}}{=} \\ &= g(x+\epsilon)\cdot h(x+\epsilon) - \underline{g(x)\cdot h(x+\epsilon)} \\ &\quad + \underline{g(x)\cdot h(x+\epsilon)} - g(x)\cdot h(x) \\ &= \big(g(x+\epsilon) - g(x)\big)\cdot h(x+\epsilon) \\ &\quad + g(x)\cdot\big(h(x+\epsilon) - h(x)\big) \end{aligned}$$

daher $f'(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\dfrac{g(x+\epsilon) - g(x)}{\epsilon}\cdot h(x+\epsilon) + g(x)\cdot\dfrac{h(x+\epsilon) - h(x)}{\epsilon}\right]$

$= g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x)$ ☒

Korollar $\boxed{f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2}}$

Beweis $1 = f(x)\cdot x \quad \& \quad (1)' = 0$

also $0 = f'(x)\cdot x + f(x)\cdot 1$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x}\cdot f(x) = -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2}$ ☒

W 13

Verknüpfungsregel

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= g(h(x)) \\ f'(x) &= g'(h(x)) \cdot h'(x) \end{aligned}}$$

Bsp (1) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad g(x) = \frac{1}{x}$ $\quad h(x) = 1+x^2$

$f'(x) = \frac{-1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

(2) $f(x) = \sin(3x)$ $\quad g(x) = \sin(x)$ $\quad h(x) = 3 \cdot x$

$f'(x) = \cos(3x) \cdot 3 = 3 \cdot \cos(3x)$

(3) $f(x) = (x+1)^2$ $\quad g(x) = x^2$ $\quad h(x) = x+1$

$f'(x) = 2 \cdot (x+1) \cdot 1 = 2x+2$

[kontrolliere! $f(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x$]

Begründung $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta h} \cdot \frac{\Delta h}{\Delta x}$

$= \frac{\Delta g(h(x))}{\Delta h(x)} \cdot \frac{\Delta h(x)}{\Delta x}$

wenn $\Delta x \to 0$ auch $\Delta h(x) \to 0$

also dann $\left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta g(h(x))}{\Delta h(x)} &\to g'(h(x)) \\ \frac{\Delta h(x)}{\Delta x} &\to h'(x) \end{aligned} \right.$

□

Korollar $\boxed{f(x) = \ln(x) \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}}$!

Beweis $e^{\ln(x)} = x \Rightarrow e^{f(x)} = x$

links & rechts differenzieren:

$e^{f(x)} \cdot f'(x) = 1$ also $x \cdot f'(x) = 1$

$\Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

□

Übungen

(I) Schreibe als $f(x) = g(h(x))$ oder $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, bestimme g & h und g' & h' und damit $f'(x)$.

a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

b) $f(x) = \frac{x}{1+x}$

c) $f(x) = e^{2x+1}$

d) $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$

e) $f(x) = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{1/2}$

f) $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

g) $f(x) = 2^x = e^{x \cdot \ln 2}$

h) $f(x) = e^{-x}$

i) $f(x) = 3 \cdot (e^{-x} + 1)$

j) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

k) $f(x) = (x-1)^3$

l) $f(x) = (x-1)(x-2)$

m) $f(x) = x^x = e^{x \cdot \ln x}$

n) $f(x) = 3 \cdot \sin(5x-2)$

o) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

p) $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

q) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

(II) Beweise, dass $f(x) = \arcsin(x)$ die Ableitung $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ hat:

a) $h(x) := \sin(f(x)) = x$

b) $h'(x) = 1$ & $f'(x) \cdot \cos(f(x)) = 1$

c) benutze $\cos(a) = \sqrt{1-\sin^2(a)}$ und $\sin(f(x)) = x$

d) beweise $\frac{d}{dx} \arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

III Wenn wir beim 'freien Fall' auch Reibung mitnehmen, sieht "$F=m\cdot a$" etwa so aus:

$$\frac{dv}{dt} = -g + \alpha\cdot v \qquad (*)$$

Fall-beschl. Reibungskoeffizient

Zeige, dass $v(t) = \frac{g}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$ die Gleichung (*) erfüllt, und zusätzlich $v(0)=0$ aufweist.

IV Zeige, dass die Funktion $F(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ konstant ist, also $F'(x)=0$.

V Tageslängeformel für Wien:

$$T(x) = 12 + 3{,}5\cdot\sin\left(\frac{2\pi\cdot x}{365}\right) \qquad \begin{cases} T \ldots \text{ in Std.} \\ x \ldots \text{ Tage ab 21. März} \end{cases}$$

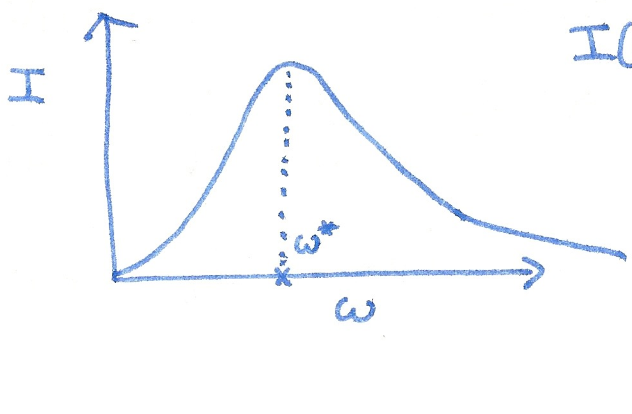
a) Gib die Bedeutung von 12; 3,5; und 365 an.

b) Wie viel Minuten kommen pro Tag um den 21. Februar dazu?

VI Philo-Food a) Differenziere $f(x) = \frac{x^n}{n!}$

b) — " — $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

VII



$$I(\omega) = \frac{\omega^3}{e^{\omega}-1}$$

Finde ω^*.