1 Stochastik

Aufgabe 1. Bei einem Zahlenrad gibt es 8 Felder, 4 sind blau, eins ist grün und 2 sind rot. Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei dreimal Drehen, zuerst Grün und dann zweimal Rot zu erwischen.

Aufgabe 2. Die folgende Tabelle zeigt das Ergebnis einer Umfrage von 1000 Personen bezüglich der allgemeinen Krankenversicherung von Arbeitgebern:

	dafür	dagegen	enthalten	gesamt
Demokraten	310	150	60	520
Republikanern	125	345	10	480
Gesamt	435	495	70	1000

Berechne die Warhscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person aus dieser Gruppe

(a) für die allgemeine Krankenversicherung ist, gegeben, diese Person sei Demokrat.

(b) gegen die allgemeine Krankenversicherung ist, gegeben, sie sei Republikaner.

(c) für die allgemeine Krankenversicherung ist.

Aufgabe 3. Familie A (2 Erwachsene, 3 Kinder) und Familie B (2 Erwachsene, 2 Kinder) fahren gemeinsam in ein Ferienhaus auf Urlaub. Mit Los wird jeden Tag bestimmt, wer einen Tag lang den Küchendienst macht. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass zweimal hintereinander jemand aus Familie A genommen wird,

(a) wenn dasselbe Familienmitglied mehrmals hintereinander drankommen darf;

(b) wenn dasselbe Familienmitglied nicht mehrmals hintereinander drankommen darf.

Aufgabe 4. Ein Mädchen fährt auf Sommersportwoche und muss 2 Sportarten auswählen. Es gibt 4 Möglichkeiten; Tennis, Surfen, Segeln und Minigolf. Sie beschließt, das Los entscheiden zu lassen.

(a) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass sie Surfen und Minigolf machen wird.

(b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass sie nicht segeln wird.

Aufgabe 5. In einem Federpenal befinden sich 8 Stifte: 3 rote, 2 gelbe, 2 grüne und ein blauer Stift. Ermittle die folgenden Wahrscheinlichkeiten beim Zufallsversuch, bei dem viermal ohne Zurücklegen ein Stift gezogen wird:

(a) Der erste Stift ist blau, die anderen rot.

(b) Alle Farben kommen vor.

(c) Es kommen genau 2 grüne Stifte vor.

(d) Alle gezogenen Stifte haben dieselbe Farbe.

Aufgabe 6. In einer Box befinden sich die Buchstaben E, E, T, T, R, R, S, S, I, I, N, N, A, A, K. Nach einander werden die Buchstaben aus der Box gezogen und aneinander gereiht. Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass dabei das Wort RETSINAKANISTER erhalten wird.

Aufgabe 7. In einer Packung mit Gummibären gibt es noch 5 rote, 2 gelbe und 1 grünes. Man nimmt ohne zu schauen zwei Gummibären aus der Packung. Ermittle die Wahrscheinlichkeit, zwei rote Gummibären zu ziehen.

Aufgabe 8. Eine Münze mit Bild und Kopf wird dreimal geworfen. (i) Gib den Ereignisraum an. (ii) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, auf (a) Bild beim ersten Mal, (b) kein Bild.

Aufgabe 9. Eine gezinkte Münze zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von 65% Kopf. Ermittle die Wahrscheinlichkeit, bei sechs Würfen

(a) 3mal Kopf und 3mal Zahl;
(b) 6mal dasselbe (Kopf oder Zahl);
(c) öfter Zahl als Kopf zu sehen.

Aufgabe 10. [Tricky]
Du besitzt 3 'Würfel'; einen Dodekaeder, einen Oktaeder und einen Hexaeder. Der Dodekaeder ist mit A bis L beschriftet, der Oktaeder mit M bis T und der Hexaeder mit U bis Z.
(a) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, deinen Namen in der richtigen Reihenfolge zu würfeln, wobei du immer mit dem Würfel wirfst, auf dem der Buchstabe vorkommt.
(b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, genau die Buchstaben in richtiger Anzahl zu würfeln, wobei du genau so oft mit dem Dodekaeder würfelst, wie viele Buchstaben in deinem Namen auf dem Dodekaeder stehen, und wobei du genau so oft mit dem Oktaeder würfelst, wie viele Buchstaben in deinem Namen auf ihm stehen, und wobei du genau so oft mit dem Hexaeder wirfst, wie viele Buchstaben in deinem Namen auf ihm vorkommen.

Aufgabe 11. Die Tabelle zeigt die Notenverteilung bei einer Schularbeit Informatik:

Note	1	2	3	4	5
Anzahl	3	8	6	7	2

(a) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, einen Schüler mit einem Dreier zu ziehen.
(b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, wenn man drei Schüler per Zufall wählt, dass alle eine negative Note haben.
(c) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, wenn man zwei Schüler per Zufall wählt, dass die Notensumme mindestens 7 beträgt.

Aufgabe 12. Eine gezinkte Münze zeigt zwei von dreimal Kopf. Sie wird zweimal geworfen. Ermittle folgende Wahrscheinlichkeiten:
(a) zweimal wird Zahl geworfen;
(b) zweimal wird Kopf geworfen;
(c) einmal wird Zahl, einmal wird Kopf geworfen.

Aufgabe 13. Die Wahrscheinlichkeit auf Leben auf einem Planeten ist von drei Faktoren bestimmt;

(1) Eine geeignete Atmosphäre ist vorhanden; dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit eins auf 100.000.

(2) Wasser ist in flüssiger Form vorhanden; dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit eins auf zwei.

(3) Das giftige Mineral Vitähosticum kommt nicht vor. Es kommt auf einem Viertel der Planeten vor.

Wenn alle drei Bedingungen erfüllt sind, ist es sicher, dass Leben vorkommt. Wenn (3) nicht erfüllt ist, das heißt, Vitähosticum kommt vor, dann gibt es mit Sicherheit kein Leben - egal wie die anderen Bedingungen erfüllt sind.
(a) Vor 100 Jahren wussten wir noch nichts von Mars. Wie hätten wir damals die Wahrscheinlichkeit auf Leben auf dem Mars eingeschätzt?
(b) Kreuze die richtige(n) Aussage(n) an:

☐ Das Ereignis "(1) ist erfüllt" benachteiligt das Ereignis "es gibt Leben".

☐ Das Ereignis "(2) ist erfüllt" ist unabhängig vom Ereignis "es gibt Leben".

☐ Das Ereignis "(3) ist erfüllt" benachteiligt das Ereignis "es gibt Leben" nicht.

(c) Forschungen zufolge gibt es auf dem Planeten Kepler-3B Wasser nur an den Polen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten, Leben auf den Polen vorzufinden und Leben auf dem Äquator vorzufinden.

2 Komplexe Zahlen

Aufgabe 14. Erläutere die Beziehung zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Aufgabe 15. Was ist problematisch am Ausdruck $i = \sqrt{-1}$?

Aufgabe 16. Beschreibe, welche Werte angenommen werden für $n \in \mathbb{N}$: (a) i^{2n}, (b) i^{2n+1}, (c) i^n.

Aufgabe 17. Bringe auf die Form $a + bi$ (a) $z = (8 + 9i)(12 + 5i)$ (b) $w = \frac{7+i}{-4+2i}$, (c) $(10 + i)(-3 - 4i)$, (d) $(6 + \frac{i}{2})(5 + 4i)$.

Aufgabe 18. Bringe auf die Form $a + bi$ den Term $\frac{u+iv}{u-iv}$.

Aufgabe 19. Bringe auf die Form $a + bi$ die Zahl $z = \frac{4+i}{-1+5i}$.

Aufgabe 20. Bringe auf die Form $a + bi$ die Zahl $z = 1 + 3i + 6i + 9 + 9i + 5$.

Aufgabe 21. Bringe auf die Form $a + bi$ die Zahl $z = (12 + \frac{i}{2})^2 + (20 + \frac{i}{2})^2$.

Aufgabe 22. Finde die komplex konjugierte Zahl zu (a) $z = \frac{3+8i}{7+4i}$, (b) e^{7i}, (c) $6 + 7i$, (d) $-2(2 - 3i)$.

Aufgabe 23. Zerlege in Linearfaktoren: (a) $x^2 + 6x + 12$, (b) $x^2 - 14x + 65$, (c) $x^2 + 6x + 18$.

Aufgabe 24. Finde alle Lösungen der Gleichungen (a) $x^2 + 4x + 2 = 0$ und (b) $x^2 + 4x + 6 = 0$, (c) $7x^2 + 49x + 98 = 0$.

Aufgabe 25. Finde alle Lösungen von $(x - 2 + i)(x + 2 - 1)(x + 3) = 0$.

Aufgabe 26. Gib bei jeder der Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ an, ob die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ eine Lösung in dieser Menge hat, oder nicht.

Aufgabe 27. Zeige, dass die Gleichung $(x - 4a)^2 + 6a^4 = 0$ für $a > 0$ keine reelle Lösungen hat.

Aufgabe 28. Beschreibe, wie viele Lösungen die Gleichung $x^4 - 4x^3 + 7x = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ maximal haben kann.

Aufgabe 29. Gib eine quadratische Gleichung mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$, von der eine Lösung $x = 3 + 2i$ ist.

Aufgabe 30. Ermittle die Norm von $z = 9e^{i\varphi}$, wobei $\varphi \in [0, \pi)$.

Aufgabe 31. Erläutere die Norm (den Betrag) einer komplexen Zahl und interpretiere die Norm geometrisch.

Aufgabe 32. Beschreibe Argument und Norm einer komplexen Zahl, und gib an, wie Norm und Argument in der Polardarstellung wiedergegeben werden.

Aufgabe 33. Erläutere die Darstellung $z = re^{i\alpha}$.

Aufgabe 34. Gib die komplexe Zahl in Polardarstellung an: (a) $z = 8 + 6i$, (b) $w = 15 - 8i$, (c) $u = -7 + 14i$.

Aufgabe 35. Finde a, b in $a + bi = 7e^{0,1\pi i}$.

Aufgabe 36. Gib das Produkt uv der komplexen Zahlen $u = 5e^{0,1\pi i}$ und $v = 4e^{0,4\pi i}$.

Aufgabe 37. Gib die komplexe Zahl in karthesischer Form ($z = a + bi$) an: (a) $7(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$, (b) $5(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}))$.

Aufgabe 38. Gib eine grafische Darstellung von der Menge aller komplexen Zahlen z mit $|z| = 2$.