Prüfungssituation

Polynome und Differenzieren

jede Aufgabe 5%

Aufgabe 1

Finde die Nullstellen der Funktion $y = x^2 \cdot (x+1)(x-14)$

$x = 0$, $x = -1$, $x = 14$.

Aufgabe 2

Gegeben ist, dass die Funktion $p(x) = x^3 - 6x^2 + 8x - 3$ eine Nullstelle an der Stelle $x = 1$ hat. Finde die anderen Nullstellen!

$x^3 - 6x^2 + 8x - 3 = (x-1)(x^2 + px + q)$. Ausmultiplizieren und Koeffizienten vergleichen ergibt: $p - 1 = -6$ und $q = -3$, sodass $p = -5$ und $q = 3$.

Die anderen Nullstellen sind somit von $x^2 - 5x + 3 = 0$. Also $x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$.

Aufgabe 3

Berechne die Steigung der Sekante von $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2$ durch $(2|-2)$ und $(4|16)$.

$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{16-(-2)}{4-2} = \frac{18}{2} = 9$.

ACHTUNG: Die Punkte waren hier also schon gegeben. Du musstest gar keine $f(2)$ und $f(4)$ ausrechnen …

Aufgabe 4

Berechne die Steigung der Tangente der Funktion $f(x) = 3\sin(\pi + 2x)$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$.

$f'(x) = 6\cos(\pi + 2x)$. Und $f'(\frac{\pi}{2}) = 6\cos(\pi + \pi) = 6$.

ACHTUNG $\cos(2\pi) = 1$, das solltet ihr wissen!

Aufgabe 5

Berechne $\lim_{x\to 0}\Big(3x + 2 + 2^x\Big)$.

Hier ist kein Problem mit Division durch Null. Also können wir ruhig $x = 0$ einsetzen. Damit bekommen wir dann $3 \cdot 0 + 2 + 2^0 = 3$.

Aufgabe 6

Stelle die Geradengleichung $y = kx + d$ auf für die Tangente am Graphen der Funktion $g(x) = x^2 e^{-x}$ an der Stelle $x = 1$.

Wenn $x = 1$, dann $y = g(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

$g'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, also $g'(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Daher $y = \frac{1}{e}x + d$, aber d noch unbekannt. Da aber die Tangente durch $(1|e^{-1})$ gehen muss, wissen wir $\frac{1}{e} = \frac{1}{e} + d$, also $d = 0$. Somit $y = \frac{x}{e}$ ist die Gleichung der Tangente.

Aufgabe 7

Ein Gegenstand straht Wärmestrahlung ab. Die Intensität dieser Strahlung ist direkt proportional zur vierten Potenz der Temperatur T des Gegenstands. Durch diese Abstrahlung kühlt der Gegenstand ab. Beschreibe folgende Formel in Worten:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\alpha T^4$$

hierbei ist t die Zeit in Sekunden und α ist eine positive reelle Zahl.

Die Änderungsrate der Temperatur ist direkt proportional zur vierten Potenz der Temperatur. Bzw. Die momentane Temperaturabnahme ist direkt proportional zur vierten Potenz der Temperatur.

Aufgabe 8

Ein Gegenstand straht Wärmestrahlung ab. Die Intensität dieser Strahlung ist direkt proportional zur vierten Potenz der Temperatur T des Gegenstands. Durch diese Abstrahlung kühlt der Gegenstand ab. Beschreibe folgende Formel in Worten:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} \approx -\alpha T^4$$

hierbei ist t die Zeit in Sekunden und α ist eine positive reelle Zahl.

Die mittlere Temperaturabnahme pro Sekunde in einem Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ ist ungefähr αT^4.

Aufgabe 9

Ein Gewicht an einer Feder schwingt auf und ab. Die Höhe $h(t)$ zur Zeit t wird durch

$h(t) = 4 \cdot \cos(1,2 \cdot \pi \cdot t)$ beschrieben. Berechne die maximale Geschwindigkeit, die das Gewicht während einer Schwingung hat.

$h'(t) = -4,8\pi \sin(1,2 \cdot \pi \cdot t)$. Die maximale Geschwindigkeit folgt dann aus $-1 \leq \sin(x) \leq 1$. Daher die maximale Geschwindigkeit ist $4,8\pi$.

Aufgabe 10

Formuliere die Produktregel vom Differenzieren.

Seien g, h Funktionen (die man differenzieren kann) und sei f das Produkt, also $f(x) = g(x) \cdot h(x)$. Dann gilt $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$.

Aufgabe 11

Formuliere die Verknüpfungsregel vom Differenzieren.

Seien g, h Funktionen (die man differenzieren kann) und sei f ihre Verknüpfung $f(x) = g(h(x))$. Dann gilt $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

Aufgabe 12

Differenziere $f(x) = \frac{3-\sin(x)}{3+\cos(x)}$.

$f'(x) = \frac{-\cos(x)(3+\cos(x))+(3-\sin(x))\sin(x)}{(3+\cos(x))^2} = \frac{-1+3(\sin(x)-\cos(x))}{(3+\cos(x))^2}$.

Aufgabe 13

Beschreibe folgenden mathematischen Ausdruck in Worten

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Vorschlag:

Die erste Ableitung an der Stelle x ist der Grenzwert der Steigung der Sekanten zwischen den Stellen x und $x + \Delta x$, wobei dann Δx immer kleiner genommen wird. Oder: Die Steigung der Tangente an der Stelle x ist der Grenzwert der Steigung der Sekanten an den Stellen x und $x + \Delta x$ für Δx gegen Null.

Aufgabe 14

Bestimme die Extremstellen von $f(x) = x^2 e^{-x}$.

$f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$. Dies ist nur Null, wenn $x = 0$ oder $x = 2$. Wenn wir f'' ausrechnen, finden wir $f''(2) \neq 0$ und $f''(0) \neq 0$. Daher sind dies auch wirklich Extremstellen.

Aufgabe 15

Was ist der Zusammenhang zwischen Extremstellen einer Funktion und der ersten Ableitung?

In einer Extremstelle verschwindet die erste Ableitung. Achtung, umgekehrt gilt es nicht!

Aufgabe 16

Was ist ein Wendepunkt?

Ein Punkt am Graphen einer Funktion f, wo die zweite Ableitung f'' verschwindet. Hier ändert sich die Krümmung der Funktion (falls $f''' \neq 0$).

ACHTUNG: In einem Wendepunkt ändert sich das Monotonieverhalten nicht unbedingt. Dieses ändert sich in einem lokalen Extremum (zB, wenn $f' = 0$, aber $f'' \neq 0$).

Aufgabe 17

In Oslo sind die Tage am 21. Dezember am kürzesten, nämlich 4 Stunden. Am 21. Juni sind sie am längsten, nämlich 20 Stunden. Stelle eine Formel von der Form $T(x) = A \cdot \sin(B \cdot x) + C$ auf, wobei x den Tag andeutet, und zwar so, dass $x = 0$ am 21. März (Tag-und-Nacht-Gleich, Äquinoktium).

Mittlere Tageslänge $= 12 = C$. Periode ist ein Jahr, also 365 Tage, also $B = \frac{2\pi}{365}$ und die Auslenkung ist 8, denn das Minimum ist um 8 weniger als 12 und das Maximum ist um 8 mehr als 12. Daher:

$T(x) = 8\sin(\frac{2\pi x}{365}) + 12$.

Aufgabe 18

Bestimme die Wendepunkte der Funktion $h(x) = x^4 - 12x^3 - 27x^2 - x - 1$.

$h''(x) = 12x^2 - 72x - 54x$. Daher $h''(x) = 0$ impliziert $2x^2 - 12x - 9 = 0$. Daher $x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 2 \cdot 9}}{4} = \ldots$.

Aufgabe 19

Was ist Links- bzw. Rechtskrümung? Mache mit einer Skizze klar!

Linkskrümmung $f'' > 0$, also die Steigung der Tangenten nimmt zu, wie der Graph von $f(x) = x^2$ und bei Rechtskrümmung gilt $f'' < 0$, sodass die Steigung der Tangenten abnimmt, wie zB beim Graphen von $f(x) = -x^2$.

Aufgabe 20

Welche Funktionen erfüllen die Bedingung „$f'(x)$ `ist für alle` x `gleich`"?

Lineare Funktionen.

Aufgabe 21

Gegeben ist $F(x) = e^{-x^2}$. Zeige, dass $F'(x) + 2xF(x) = 0$.

$F'(x) = -2xe^{-x^2}$ daher $F'(x) + 2xF(x) = -2xe^{-x^2} + 2xe^{-x^2} = 0$.

Aufgabe 22

Gegeben ist $G(x) = 3e^x$. Bestimme die Stelle am Graphen, an dem die Tangente parallel zur Geraden $y = 2x - 4$ ist.

Da $G'(x) = 3e^x$ gilt, und die Steigung der Geraden 2 beträgt, wird ein x gesucht, sodass $3e^x = 2$, was durch $x = \ln(\frac{2}{3})$ gelöst wird.

Aufgabe 23

Die Funktion $h(x) = \frac{x}{x^2+2}$ hat eine Nullstelle bei $x = 0$. Bestimme den Winkel unter dem der Graph von h die x-Achse schneidet!

Differenzieren ergibt $h'(x) = \frac{1\cdot(x^2+2)-x\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$, sodass $h'(0) = \frac{2}{2^2}$. Dies ist der Tangens des Steigungswinkels, also $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$, und somit $\alpha = \arctan(\frac{1}{2}) \approx 0,46$ Bogenmaß, also ungefähr 27 Grad.

Aufgabe 24

Die Funktion $t(x) = x^4 e^{-x^2}$ hat ein Minimum bei $x = 0$. Bestimme die Neigung der Tangente an der Stelle $x = 0$.

Wenn die Funktion dort ein Minimum hat, ist die Steigung der Tangente Null. Also, die Tangente ist dort parallel zur x-Achse. Der Neigungswinkel ist somit auch Null.