Korrekturvorlage der zweiten SA 7D am 17.12.2014

*Erster Teil*

**Aufgabe 1**. (2P)
Wählen Sie eine richtige Möglichkeit aus, um einen korrekten mathematischen Satz zu bilden.
Wenn eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ______①______ , dann gilt ______②______.

richtig wären:
den konstanten Wert 3 hat $\Rightarrow f' = 0$
monoton steigend ist $\Rightarrow f' \geq 0$
monoton fallend ist $\Rightarrow f' \leq 0$

**Aufgabe 2**. (2P) Gegeben sind die Funktionen $f_1(x) = e^x$ und $f_2(x) = \ln(x)$. Entscheiden Sie, ob untenstehenden Aussagen auf $f_1$ oder $f_2$ zutreffen.

| Aussage | Funktion |
|---|---|
| Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. | $f_1$ |
| Die Tangente an der Stelle $x = 1$ hat Steigung $e$. | $f_1$ |
| Die Funktion hat eine Nullstelle. | $f_2$ |
| Der Graph der Funktion hat eine Rechtskrümmung. | $f_2$ |
| Im Limes $x \to \infty$ geht die Steigung gegen Null. | $f_2$ |

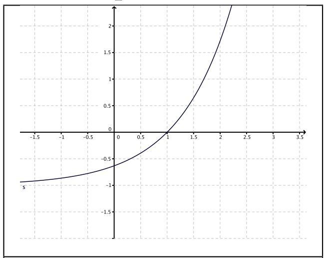
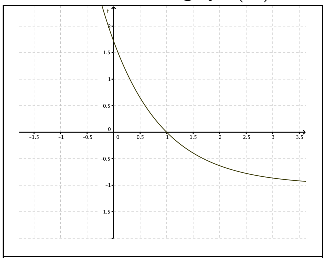
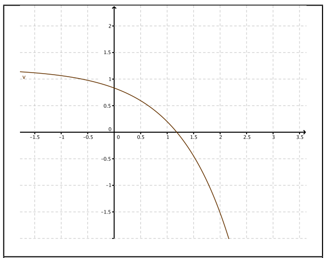
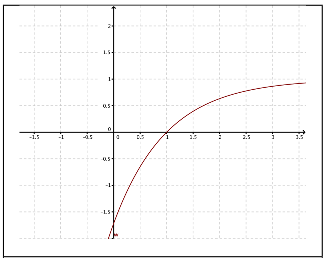
**Aufgabe 3**. (2P) Bestimen Sie einen Wert von $a$ sodass die Funktion $H(x) = x^3 + 2x^2 + ax$ **keine** Extremstellen hat.
Differenzieren ergibt $H'(x) = 3x^2 + 4x + a$. Dies hat keine Nullstellen falls $16 - 12a < 0$. Also, jede $a > 4/3$ reicht.

**Aufgabe 4**. (2P) Bestimmen Sie die Gleichung $y = kx + d$ für die Tangente im Punkt $(2|3)$ am Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - 1$.

$y = kx + d$ mit $k =$ ______________ und $d =$ ______________.
$k = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 8$. Also $y = 8x + d$, und wenn $x = 2$, dann $y = 3$, und somit $3 = 16 + d$, daher $d = -13$.

| **Aufgabe 5**. (2P) Kreuzen Sie die 3 richtigen Aussagen an! | |
|---|---|
| 1. ☒ | Eine lineare Funktion $f$ erfüllt die Bedingung $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f(x+1) - f(x)$. |
| 2. ☒ | Die erste Ableitung eines Polynoms von Grad $n$ ist ein Polynom von Grad $n - 1$. |
| 3. ☐ | Wenn $f'(x) = 0$ für alle $x$, dann ist der Graph von $f$ parallel zur $y$-Achse. |
| 4. ☐ | Wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, dann hat $f$ an der Stelle $x$ ein Maximum. |
| 5. ☒ | Wenn $f'(x) < 0$ auf dem Intervall $[a, b]$, dann ist $f$ monoton fallend auf $[a, b]$. |

**Aufgabe 6**. (2P) Von einer Funktion $f(x)$ ist bekannt, dass sie (1) auf dem Intervall $(-\infty, 1)$ monoton steigend ist und (2) genau bei $x = 1$ ein Maximum hat. Bestimmen Sie, welche Graphik den Graphen von der ersten Ableitung $f'(x)$ darstellen könnte.

| | | | |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| ☐ | ☒ | ☐ | ☐ |

**Aufgabe 7**. (2P) Betrachten Sie folgende trigonometrische Funktionen

$f_1(x) = \sin(x)^2, \quad f_2(x) = 2\cos(x), \quad f_3(x) = \sin(2x), \quad f_4(x) = \sin(x)\cos(x), \quad f_5(x) = \cos(-2x).$

Ordnen Sie jede trigonometrische Funktion ihrer ersten Ableitung zu und schreiben Sie $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ und $f_5$ an die richtige Stelle!

(a) Die Funktion $f_3$ hat erste Ableitung $2\cos(x)^2 - 2\sin(x)^2 = 2\cos(2x)$.

(b) Die Funktion $f_1$ hat erste Ableitung $2\sin(x)\cos(x)$.

(c) Die Funktion $f_5$ hat erste Ableitung $-2\sin(2x)$. [**(!!!)**]

(d) Die Funktion $f_2$ hat erste Ableitung $-2\sin(x)$.

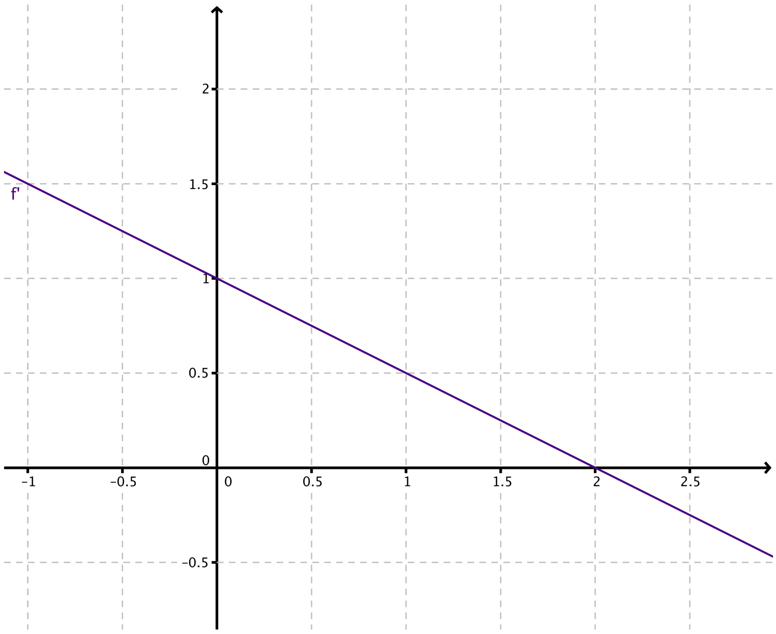
(e) Die Funktion $f_4$ hat erste Ableitung $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$.
INFO: $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha), \quad \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

**Aufgabe 8**. (2P) Bestimmen Sie den Winkel, unter welchem die Tangente im Punkt $(-\frac{\pi}{4} | -\frac{1}{2})$ am Graphen der Funktion $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \tan(x)$ die $x$-Achse schneidet.
$g'(x) = \frac{1}{2\cos^2(x)}$ also $g'(-\pi/4) = \frac{1}{2\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$. Daher $\tan(\alpha) = 1$, und somit $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

**Aufgabe 9**. (2P) Die Funktion $h(x) = \ln(x^2 - 3x + 4)$ ist positiv, hat Ableitung $h'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+4}$ und hat ein Minimum im Interval $[-1, 5]$. Bestimmen Sie die genaue Stelle des Minimums.

Es muss gelten $h'(x) = 0$. Dies hat nur eine Lösung, nämlich wenn $2x - 3 = 0$, also $x = 3/2$.

**Aufgabe 10**. (2P) In der untenstehenden Figur sehen Sie den Graphen der ersten Ableitung $f'$ einer Funktion $f$. Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Aussagen bezüglich $f$ zutreffen.




| | |
|---|---|
| 1. ☐ | $f$ ist monoton fallend. |
| 2. ☒ | $f$ hat ein Maximum an der Stelle $x = 2$. |
| 3. ☒ | An der Stelle $x = 0$ beträgt die Steigung der Tangente am Graphen von $f$ 1. |
| 4. ☐ | $f$ ist eine lineare Funktion. |
| 5. ☐ | $f > 0$ wenn $x < 0$. |

**Aufgabe 11**. (2P) Beachten Sie die zweite Ableitung von der Funktion $m(x) = 3\sin(x)$ und bestimmen Sie die Wendepunkte im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
$m''(x) = -3\sin(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

**Aufgabe 12**. (2P) Die Sekante der Funktion $p(x) = \frac{x^3-x}{3}$ durch die Punkte $(0|0)$ und $(3|8)$ hat die Gleichung $y = \frac{8x}{3}$. Bestimmen Sie, an welcher Stelle im Intervall $[0, 3]$ die Tangente an dem Graphen von $p$ parallel zur gegeben Sekante ist.
$p'(x) = x^2 - \frac{1}{3}$, dies ist $\frac{8}{3}$, wenn $x^2 = 3$, also $x = \pm\sqrt{3}$ wovon nur $x = \sqrt{3}$ im Intervall liegt.

*TEIL II*

**Aufgabe** 1.
Ein Teilchen folgt in einem Teilchenbeschleuniger einer Bahn, deren $x$-Koordinate durch $x(t) = 20\cos(8\pi t)$ und deren $y$-Koordinate durch $y(t) = 20\sin(8\pi t)$ gegeben wird. In diesen Formeln werden die Koordinaten in Metern angegeben und die Zeit in Sekunden.

**(a)** (1P, Kompensationspunkt) Zeigen Sie, dass $x(t)^2 + y(t)^2$ konstant ist, und bestimmen Sie den Wert dieser Konstante. $x^2(t) + y^2(t) = 20^2$. also konstant und zwar 400.

**(b)** (2P, Kompensationspunkte) Bestimmen Sie, wie oft das Teilchen pro Sekunde um das Zentrum des Teilchenbeschleunigers dreht. Periode ist $\frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}$, also viermal pro sekunde.

**(c)** (2P) Die Geschwindigkeit des Teilchens wird durch den Vektor $\overrightarrow{v(t)} = (x'(t)|y'(t))$ gegeben. Bestimmen Sie die Größe $|\overrightarrow{v(t)}|$ dieses Geschwindigkeitsvektors. Achtung: Der Strich in $x'(t)$ bedeutet hier Differenzieren nach der Zeit $t$. $\overrightarrow{v(t)} = 160\pi(-\sin(8\pi t)|\cos(8\pi t))$. Die Größe ist somit $160\pi$.

**(d)** (2P) Zeigen Sie, dass der Ortsvektor $\overrightarrow{r(t)} = (x(t)|y(t))$ und den Geschwindigkeitsvektor normal auf einander stehen. Das innere Produkt ergibt $3200 \cdot (-\sin(8\pi t)\cos(8\pi t) + \sin(8\pi t)\cos(8\pi t)) = 0$ also stehen sie normal auf einander.

**(e)** (2P) Zeigen Sie, dass der Ortsvektor $\overrightarrow{r(t)} = (x(t)|y(t))$ parallel zum Beschleunigungsvektor $\overrightarrow{a(t)} = (x''(t)|y''(t))$ ist, indem Sie eine Zahl $K$ finden, sodass $\overrightarrow{a(t)} = K \cdot \overrightarrow{r(t)}$. $\overrightarrow{a(t)} = 1280\pi^2(-\cos(8\pi t| - \sin(8\pi t))$, also $K = -64\pi^2$.

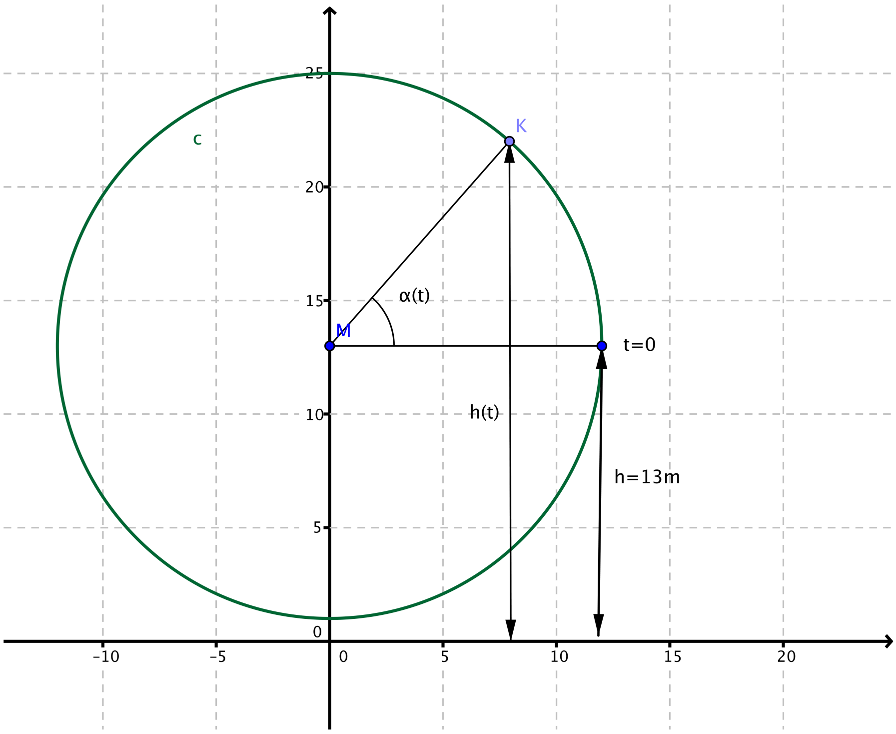
**Aufgabe** 2. Siehe auch die Figur hier unten.
Ein Riesenrad von 24 m Durchmesser, dessen Mittelpunkt $M$ 13 m über den Boden liegt, dreht sich im Uhrzeigersinn mit einer Umdrehung jede 15 Minuten.

**(a)** (2P) Stelle eine Formel auf, die zu jedem Zeitpunkt $t$ die Höhe $h(t)$ einer Kabine $K$ zuordnet, wobei für $t = 0$ die Kabine $K$ sich auf der Höhe des Mittelpunktes des Riesenrads $h = 13$ m befindet. Hinweis: bestimmen Sie $A$, $B$ $C$ sodass $h(t) = A\sin(Bt) + C$.

Periode ist 15 Minuten. Auslenkung ist 12 m. Mittelwert ist 13. Also $h(t) = 12\sin(\frac{2\pi}{15}t) + 13$, $t$ in Minuten.

**(b)** (2P) Bestimmen Sie, wie schnell die Kabine $K$ steigt, wenn sie gerade die Höhe $h = 18$ m erreicht hat.

$h(t) = 18$ bedeutet $12\sin(\frac{2\pi}{15}t) = 5$, also $\frac{2\pi}{15}t = \arcsin(\frac{5}{12})$ daher $t \approx 1,03$. Für diesen Wert $h'(1,03) = \frac{2\pi}{15} \cdot 12 \cdot \cos(5/12) \approx 4,6$ Meter pro Minute.



**Aufgabe** 3. Betrachten Sie die folgenden Funktionen:

$$C(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad S(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

**(a)** (1P, Kompensationspunkt) Finden Sie $C'(x)$ und $S'(x)$.

$C'(x) = S(x)$ und $S'(x) = C(x)$

**(b)** (2P) Bestimmen Sie $a > 0$ sodass $2C'(a) = S'(a)$.

$2S(a) = C(a)$, also $2e^a - 2e^{-a} = e^a + e^{-a}$, daher $e^a = 3e^{-a}$ daher $e^{2a} = 3$, daher $a = \frac{\ln(3)}{2}$.

**(c)** (2P) Zeigen Sie, dass $C(x)^2 - S(X)^2 = 1$. Folgt aus $C^2(x) = \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}$ und $S^2(x) = \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}$ indem man sie von einander subtrahiert.

**(d)** (2P) Zeigen Sie, dass $C(x) \geq 1$. Aus dem vorigen Teil $C^2(x) = S^2(x)+1 \geq 1$, denn $S^2(x) \geq 0$. Daher $C(x) < -1$ oder $C(x) > 1$, da aber $C(x) \geq 0$, scheidet die erste Möglichkeit aus.

**(e)** (2P) Definieren Sie die Funktion $F(x) = \ln(C(x))$. Zeigen Sie, dass $F(x)$ für alle $x$ definiert ist und drücken Sie die Ableitung $F'(x)$ in $C(x)$ und $S(x)$ aus.

$F'(x) = \frac{1}{C(x)} \cdot C'(x) = \frac{S(x)}{C(x)}$

**(f)** (2P Kompensationspunkte) Eine Kette ist zwischen zwei Wänden, die sich bei $x = -2$ und $x = +2$ befinden, aufgehängt. Die Kette folgt dem Graphen der Funktion $y = C(0,6 \cdot x)+1,40$ – siehe die Figur hier unten. Bestimmen Sie den Winkel $\alpha$ zwischen Kette und der Wand bei den Aufhängepunkten (bei $x = +2$ oder $x = -2$, denn aus Symmetriegründen sind diese Winkel gleich).

$y' = 0,6 \cdot S(0,6 \cdot x)$ und das ist $0,6 \cdot S(1,2) \approx 0,9$ Daher $\tan(\pi - \alpha) = 0,9$ und somit $90 - \alpha \approx 42$ Grad. Daher $\alpha \approx 48$ Grad.