KORREKTURVORLAGE *Erster Teil*

Aufgabe 1. (2P)
Wählen Sie eine richtige Möglichkeit aus, um einen korrekten mathematischen Satz zu bilden.
Wenn eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x = 1$ _____ ① _____ , dann gilt _____ ② _____.

①	②
eine Wendestelle hat	$f''(1) = 0$
eine Nullstelle hat	$f(1) = 0$
ein Extremum hat	$f'(1) = 0$

Aufgabe 2. (2P) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(2x)$. Entscheiden Sie, welche der untenstehenden Aussagen auf f zutreffen.

Aussage	Trifft zu
Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.	Ja
Die Tangente an der Stelle $x = \pi$ hat Steigung 0.	
Die Funktion hat eine Nullstelle bei $x = \frac{\pi}{4}$.	
Der Graph der Funktion hat eine Rechtskrümmung.	
Die Periode ist π.	Ja

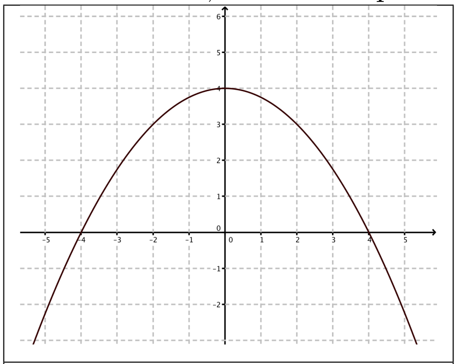
Aufgabe 3. (2P) Bestimen Sie einen Wert von a sodass die Funktion $H(x) = 2x^2 + ax$ ein Extremum an der Stelle $x = -3$ hat.
$H'(x) = 4x + a$ muss Null sein bei $x = -3$, daher $-12 + a = 0$, somit $a = 12$.

Aufgabe 4. (2P) Bestimmen Sie die Gleichung $y = kx + d$ für die Tangente im Punkt $(1|e)$ am Graphen der Funktion $f(x) = xe^x$.

$y = kx + d$ mit $k = 2e$ und $d = -e$.

Aufgabe 5. (2P) Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussagen an!	
1. ☐	Eine quadratische Funktion ist monoton steigend.
2. ☐	Falls $f'(x) = 1$ für alle x, dann ist f die Funktion $f(x) = x$.
3. ☒	Eine lineare Funktion hat keine Wendestellen.
4. ☒	In einem Terrassenpunkt ist die erste Ableitung Null.
5. ☐	Rechtskrümmung bedeutet, dass die zweite Ableitung positiv ist.

Aufgabe 6. (2P) Von einer Funktion ist bekannt, dass sie zwei Extrema und eine Wendestelle hat. Bestimmen Sie, welche Graphik den Graphen der ersten Ableitung darstellen könnte.



☒

Aufgabe 7. (2P) Betrachten Sie folgende Funktionen. Ordnen Sie die vier Funktionen in der linken Spalten jeweils ihren Ableitungen in der rechten Spalte zu. Schreiben Sie A, B, C oder D hinter der richtigen Funktion.

Funktionen	
xe^x	A
e^{x^2}	B
e^{2x}	C
x^2e^x	D

Ableitungen	
$2xe^{x^2}$	B
$2e^{2x}$	C
x^2e^x	
$xe^x + e^x$	A
$xe^x + x^2e^x$	
$2xe^x + x^2e^x$	D

Aufgabe 8. (2P) Die Funktion $g(x) = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 0$. Die Ableitung von g ist durch

$$g'(x) = \frac{1 + 2\cos(x)}{(2 + \cos(x))^2}$$

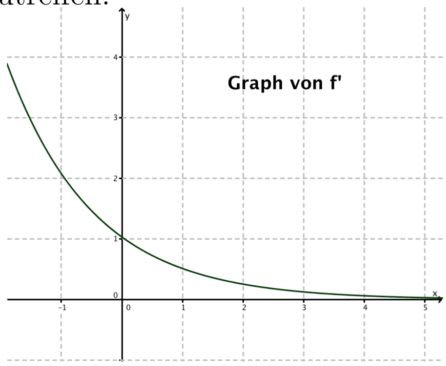
gegeben. Berechnen Sie unter welchem Winkel der Graph von g die x-Achse schneidet.
$g'(1) = \frac{1}{3}$, daher $\alpha = \arctan(1/3) \approx 18,4^o$.

Aufgabe 9. (2P) Die Funktion $h(x) = e^{-(x-3)^2+3}$ ist positiv, hat Ableitung

$$h'(x) = -(2x - 6) \cdot e^{-(x-3)^2+3}$$

und hat ein Maximum im Interval $[-5, 5]$. Bestimmen Sie die genaue Stelle des Maximums.
Wenn $x = 3$, dann $h'(x) = 0$.

Aufgabe 10. (2P) In der untenstehenden Figur sehen Sie den Graphen der ersten Ableitung f' einer Funktion f. Entscheiden Sie, welche **DREI** der unten stehenden Aussagen bezüglich f zutreffen.



1. ☐	f ist monoton fallend.
2. ☒	f' ist monoton fallend.
3. ☐	f ist eine quadratische Funktion.
4. ☒	Es gilt $f(0) < f(2)$.
5. ☒	f ist monoton steigend.

Aufgabe 11. (2P) Beachten Sie die zweite Ableitung $m''(x) = -9\cos(3x) + 2$ von der Funktion $m(x) = \cos(3x) + x^2$ und bestimmen Sie den Wendepunkt im Intervall $[0, \frac{\pi}{3}]$.
$m''(x) = 0$ impliziert $\cos(3x) = 2/9$, also $3x = \arccos(2/9)$, daher $x = \frac{\arccos(2/9}{3} \approx 0,14\pi \approx 25,7^o$.

Aufgabe 12. (2P) Die Sekante der Funktion $q(x) = \frac{x^4-4x}{8}$ durch die Punkte $(-2|3)$ und $(2|1)$ hat die Gleichung $y = -\frac{x}{2} + 2$. Bestimmen Sie, an welcher Stelle im Intervall $[-2, 2]$ die Tangente an dem Graphen von q parallel zur gegeben Sekante ist.
$q'(x) = \frac{x^3-1}{2}$ und $q'(x) = \frac{1}{2}$ genau dann, wenn $x^3 = 0$, also $x = 0$.

KORREKTURVORLAGE TEIL 2

Aufgabe 1.
Der chemische Stoff Alphahexan (Stoff A) ist instabil und wandelt im Laufe der Zeit in den Stoff Betaheptan (Stoff B) um. Um diesen Prozess zu erforschen, gibt ein Chemiker 100 Gramm von Stoff A in eine Flasche und misst jede 5 Minuten, wie viel von Stoff A und wie viel von Stoff B vorhanden sind. Auf diesen Messergebnissen basierend erstellt er ein Diagramm, dass die vorhandene Masse von Stoff A und von Stoff B in Abhängigkeit von der Zeit zeigt. Er versucht dann zwei Funktionen zu finden, die die Ergebnisse richtig darstellen. Die von ihm gefundene Formeln sind

$$m_A(t) = 100 \cdot e^{-0{,}18t}, \quad m_B(t) = 100 \cdot \left(1 - e^{-0{,}18t}\right).$$

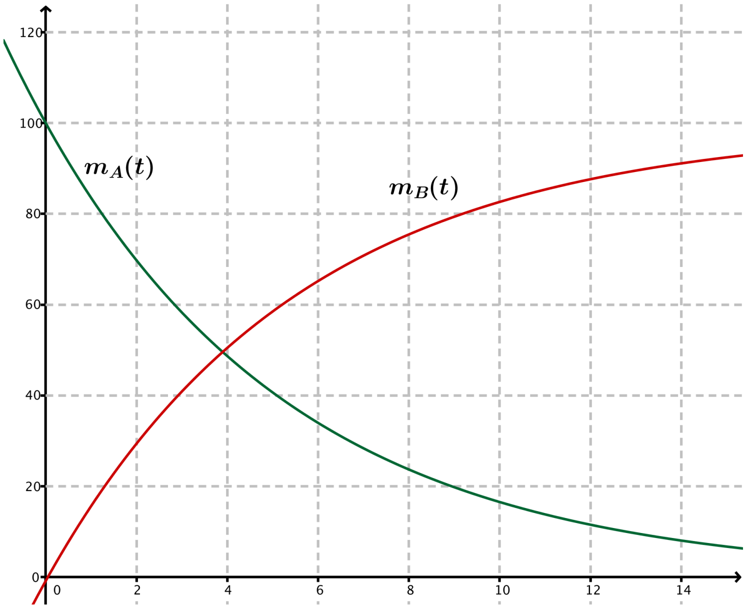
wobei m_A die vorhandene Menge von Stoff A (in Gramm), m_B die vorhandene Menge von Stoff B (in Gramm) und t die Zeit in Minuten ist.

(a) (1P, Kompensationspunkt) Berechnen Sie $m'_A(t)$ und $m'_B(t)$. $m'_A(t) = -18e^{-0{,}18t}$, $m'_B(t) = 18e^{-0{,}18t}$.

(b) (2P) Zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(m_A(t) + m_B(t)\Big) = 0$ und interpretieren Sie dieses Ergebnis. Ergebnisse von (a) aufaddieren ergibt Null. Andererseits $m_A(t) + m_B(t) = 100$. Es geht also keine Masse verloren; Masse bleibt erhalten.

(c) (2P) Erstellen Sie ein Diagramm, das die Zeitabhängigkeit von $m_A(t)$ und $m_B(t)$ deutlich darstellt. (Siehe Bild nächste Seite)

(d) (2P) Bestimmen Sie, wie lange es dauert, bevor die Hälfte von Stoff A in Stoff B umgewandelt ist. Dann muss der Faktor $e^{-0{,}18*t}$ ein Halb sein. Also $e^{0{,}18*t} = 2$, und somit $t = \frac{\ln(2)}{0{,}18} \approx 3,85$ Minuten.



Es stellt sich heraus, dass bei 500^oC der Stoff B auch instabil ist, und in C zerfällt. Stoff C ist ein Gas, das direkt aus der Flasche entweicht. Nach einigen Berechnungen stellt der Chemiker folgende neue Formeln für den Fall, dass die Temperatur 500 Grad Celsius ist, auf:

$$m_A(t) = 100 \cdot e^{-0{,}18t}\,, \qquad m_B(t) = 200\Big(e^{-0{,}18t} - e^{-0{,}27t}\Big)$$

(e) (1P, Kompensationspunkt) Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_A(t)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_B(t)$.

$m'_A(t)$ wie vorher. $m'_B(t) = -36e^{-0{,}18t} + 54e^{-0{,}27t}$

(f) (2P) Finden Sie eine Formel, die beschreibt, wie viel Gramm von Gas C zur Zeit t aus der Flasche entwichen ist.

Bei chemischen Reaktionen verliert man keine Masse. Daher $m_C(t) = 100 - m_A(t) - m_B(t) = 100\Big(1 - 3e^{-0{,}18t} + 2e^{-0{,}27t}\Big)$.

Aufgabe 2.
Ein Schüler lässt während eines Physikexperiments ein Gewicht mit Masse 250 Gramm an einer Feder schwingen. In einem Zeitintervall von 10 Sekunden macht das Gewicht 7 volle Schwingungen. Die maximale Auslenkung von der Gleichgewichtsposition (= die Position, die das Gewicht annimmt, wenn es nicht hin und her schwingt) beträgt 5cm.

(a) (2P, Kompensationspunkte) Stellen Sie eine Formel auf, die zu jedem Zeitpunkt t die Auslenkung $A(t)$ angibt. Nehmen Sie dabei an, dass zur Zeit $t = 0$ das Gewicht durch die Gleichgewichtsposition nach oben geht.

Die Periode ist $T = \frac{10}{7}$ (sek). Also Parameter B in $A\sin(Bt) + C$ ist $\frac{2\pi}{10/7} = \frac{7\pi}{5}$. Die Auslenkung geht von -5 bis $+5$, Gleichgewichtsposition ist bei $A(t) = 0$.

Es gilt somit $A(t) = 5 \cdot \sin(\frac{7\pi t}{5})$ (cm).

(b) (2P) Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit, die das Gewicht bei einer Schwingung hat.

Man findet $A'(t) = 7\pi\cos(\frac{7\pi t}{5})$. Da der Cosinus maximal $+1$ ist, ist die maximale Geschwindigkeit somit 7π cm/s.

Aufgabe 3.
Die Planetbahnen werden durch Ellipsen beschrieben. Ellipsen haben zwei Brennpunkte (F1 und F2 in der Figur). Die Achse durch die zwei Brennpunkte heißt die lange Achse. Die Sonne steht in einem Brennpunkt. Der Halbstrahl, der von der Sonne ausgehend, durch den Planeten geht, heißt Fahrstrahl. Sie α der Winkel zwischen Fahrstrahl und der langen Achse. Nehmen wir an, für einen bestimmten Planeten wird die Distanz Planet-Sonne $d(\alpha)$ durch folgende Formel gegeben

$$d(\alpha) = \frac{150}{1 - 0,03\cos(\alpha)} \qquad \text{(Mio. km).}$$

(2P) Finden Sie die größte Distanz Planet-Sonne, die kleinste Distanz Planet-Sonne, und die Distanz zwischen den beiden Brennpunkten F1 und F2.
Der Cosinus nimmt werte in $[-1, +1]$ an, somit $d_{max} = \frac{150}{1-0,03}$ und $d_{min} = \frac{150}{1+0,03}$. Aus der Figur sieht man, dass $|F_1F_2| = d_{max} - d_{min}$. Numerisch: $d_{max} = 154,6$, $d_{min} = 145,6$, daher $|F_1F_2| = 9$ Mio. km.

Aufgabe 4.
In dieser Aufgabe betrachten wir Eigenschaften von kubischen Polynomen. Folgende Sätze gelten für kubische Polynome:

SATZ 1. Falls ein kubisches Polynomen zwei unterschiedliche Extremstellen hat, kann man den Ursprung des Koordinatensystems so verschieben, dass das Polynom durch $y = a(x^3 - 3b^2x)$ gegeben ist, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und beide nicht Null sind.

SATZ 2. Jedes kubische Polynom $p(x)$ hat eine Stelle x_0, in der die zweite Ableitung p'' verschwindet, also $p''(x_0) = 0$.

(a) (2P, Kompensationspunkte). Nehmen Sie einen Ansatz $p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ für ein kubisches Polynom und beweisen Sie den `Satz 2`, indem Sie die Wendestelle x_0 in α, β, γ und δ ausdrücken.

Zweimal differenzieren ergibt: $p''(x) = 6\alpha x + 2\beta$, daher $x_0 = -\frac{\beta}{3\alpha}$. Im Besonderen gibt es also so einen x_0, denn wir haben ihn gefunden.

(b) (2P) Nehmen Sie an, ein kubisches Polynom hat zwei unterschiedliche Extremstellen. Benutzen Sie die Notation von `Satz 1` und drücken Sie die Stellen der Extrema x_{min} und x_{max} in a und b aus. (Sie dürfen annehmen, dass $a > 0$ und $b > 0$).

Differenzieren ergibt $y' = a(3x^2 - 3b^2)$ und das ist Null falls $x = \pm b$. Nehmen wir an $a, b > 0$, dann können wir also die Figur unten benutzen. Dann $x_{min} = +b$ und $x_{max} = +b$.

(c) (2P) Nehmen Sie an, ein kubisches Polynom hat zwei unterschiedliche Extremstellen. Benutzen Sie die Notation von `Satz 1` und drücken Sie die Stelle des Wendepunktes in a und b aus.

Nochmal differenzieren ergibt $y'' = 6ax$, und somit $x_0 = 0$.

(d) (2P) Zeigen Sie, dass die Punkte $(x_{min}|f(x_{min}))$, $(x_{max}|f(x_{max}))$ und $(x_0|f(x_0))$ auf einer Geraden liegen. Hinweis: Versuchen Sie die Punkte in ein Koordinatensystem einzuzeichnen!

Siehe Figur: es gilt $(x_{min}|f(x_{min})) = (b|-2ab^2)$, $(x_{max}|f(x_{max})) = (-b|2ab^2)$ und $(x_0|f(x_0)) = (0|0)$. Da $(b|-2ab^2) = -(-b|2ab^2)$ (also der eine Punkte ist das Spiegelbild des anderen bei Punktspiegelung am Ursprung) geht die Gerade durch $(x_{min}|f(x_{min}))$ und $(x_{max}|f(x_{max}))$ auch durch $(0|0)$, was zu zeigen war.