Prüfungssituation

'Einfache' Kompetenzen

Ausarbeitung – Modulo Fehler :-)

Aufgabe 1

Löse nach x: $7\cos(2x - \pi) = 1$.

- -

$2x - \pi = \pm\arccos(\frac{1}{7}) + k \cdot 2\pi$, mit $k \in \mathbb{Z}$ also $x = \pm\frac{1}{2}\arccos(\frac{1}{7}) + \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Und mit $\frac{1}{2}\arccos(\frac{1}{7}) \approx 0,227\pi$ kommst du dann auf $x = 0,727\pi + k\pi$ und $x = 0,273\pi + k\pi$, wobei k eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 2

Ein Schüler würfelt mit einem ehrlichen Würfel dreimal. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 6 ist.

- -

Optionen: $(1,2,3)$ und $(1,1,4)$ und $(2,2,2)$. Die erste kann auf 6 Weisen vorkommen, die zweite auf drei, die dritte auf nur eine Weise. Also von $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ Möglichkeiten insgesamt sind 10 günstig, also $P(\text{Augensumme ist } 6) = \frac{10}{216}$.

Aufgabe 3

Löse nach x: $x^4 - 3x^2 - 2 = 0$.

- -

$x^2 = t$, dann $t^2 - 3t - 2 = 0$. Zwei Lösungen, nur eine davon ist positiv, $t \approx 3,56$, daher $x = \pm\sqrt{3,56} \approx \pm 1,89$.

Aufgabe 4

Gib die Menge aller x, sodass $2 \leq 5x - 3 \leq 4$.

- -

$5 \leq 5x \leq 7$, also $1 \leq x \leq 1,4$, also $x \in [1; 1,4]$.

Aufgabe 5

Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$. Sei M der Schnittpunkt der Diagonalen. Gib einen Ausdruck in A, B, C und D für M.

Mindestens drei Möglichkeiten $M = \frac{1}{4}(A + B + C + D)$, oder $M = \frac{1}{2}(A + C)$, oder $M = \frac{1}{2}(B + D)$, oder sogar etwas wie $M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Aufgabe 6

Sei $g : 5x + 2y = 13$ eine Gerade. Gib den Normalvektor zu g.

- -

Einfach ablesen: $(5|2)$.

Erklärung: Stell dir vor, wir haben zwei Punkte $P = (x_1|y_1)$ und $Q = (x_2|y_2)$ auf der Geraden, dann also $5x_1 + 2y_1 = 13 = 5x_2 + 2y_2$. Also $5(x_1 - x_2) + 2(y_1 - y_2) = 0$. Aber $(x_1 - x_2|y_1 - y_2) = P - Q = \overrightarrow{QP}$ ist der Richtungsvektor von g. Daher $\overrightarrow{QP} \cdot (5|2) = 0$ und somit steht $(5|2)$ senkrecht auf g.

Jede Gerade in der Ebene hat diese Normalform: $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{x} = n_1 x + n_2 y = c$, wobei c eine Zahl ist.

Aufgabe 7

Die Inflation beträgt in einem Land 3% pro Jahr. Berechne die mittlere Preissteigung nach 5 Jahren.

- -

$(1,03)^5 \approx 1,16$, also etwa 16%.

Aufgabe 8

Differenziere die Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{2+\sin(x)}$.

- -

Ergebnis $\frac{2\cos(x)}{(2+\sin(x))^2}$.

Aufgabe 9

Finde das Extremum der Funktion $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x+1}$ für $x > 0$.

Differenzieren $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{3x+1} - -\frac{3\sqrt{x}}{(3x+1)^2}$. Ich benutze hier die Produktregel für die Faktoren $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{3x+1}$, die Ableitungen $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ bzw. $\frac{-3}{(3x+1)^2}$ haben. Das ist hier leichter ... glaube ich.

Aus $g'(x) = 0$ folgt dann $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{3x+1}$ also $3x + 1 = 6x$ sodass $x = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 10

Löse nach x: $2^x = 345$.

- -

$x = {}^2\log(345)$ also $x = \frac{\ln(345)}{\ln(2)} \approx 8,43$.

Aufgabe 11

Finde die Periode von $f(x) = 5\sin(3x + \frac{\pi}{4}) - 2$.

- -

$\frac{2\pi}{3}$.

Aufgabe 12

Finde das Minimum von der Funktion $h(x) = |7x - 3| + 1$.

- -

Der Betrag ist immer positiv und der kleinst mögliche Wert ist Null. Dies passiert wenn $x = \frac{3}{7}$, und dann $h = 0 + 1 = 1$.

Aufgabe 13

Finde die Steigung der Gerade $k : 8x + 3y = 10$.

- -

Umformen $y = -\frac{8}{3}x + \frac{10}{3}$ also $k = -\frac{8}{3}$.

Aufgabe 14

Berechne die absolute Änderung von $f(x) = x + 2x + 3x^2 + 5x^6$ auf dem Interval $[1, 3]$.

- -

$f(3) = 3681$ und $f(1) = 11$. Subtraktion 3670.

Aufgabe 15

Löse nach x: $\frac{x^2-3}{x+1} = 5$.

- -

Ausmultiplizieren $x^2 - 3 = 5x + 5$ also $x^2 - 5x - 8 = 0$ daher $x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{57}$.

Aufgabe 16

Eine Flasche hat ein Volumen von $750ml$. Ein durchschnittlicher Wassertropfen ist eine Kugel mit einem Radius von $2mm$. Wie viele Regentropfen werden in die Flasche fallen müssen, damit sie voll ist?

$1ml = 1cm^3$ also $1ml = 1000mm^3$. Ein Regentropfen $V = \frac{4}{3}\pi 2^3 mm^3 \approx 35mm^3$. Somit Anzahl ist $\approx \frac{750000}{35}$ also etwas mehr als 20.000 mal.

Aufgabe 17

Die Funktion $t(x)$ beschreibt eine direkte Proportionalität. Gegeben ist $t(5) = 24$. Berechne $t(100)$.

- -

$t(100) = \frac{100}{5} \cdot 24 = 48$.

Aufgabe 18

Die Funktion $s(x)$ beschreibt eine indirekte Proportionalität. Gegeben ist $s(3) = 3$. Berechne $s(100)$.

$s(100) = \frac{3s(3)}{100} = 0,09$.

Aufgabe 19

Von einem Quader werden alle Kanten 13% länger gemacht. Um wie viel Prozent nimmt das Volumen zu?

- -

$(1,13)^3 \approx 1,44$ also 44%.

Aufgabe 20

Finde eine Funktion f, sodass $f'(x) = 3x^2 - 7x^9$.

- -

Zum Beispiel $f(x) = x^3 - \frac{7}{10}x^{10}$, aber jede Funktion $f(x) = x^3 - \frac{7}{10}x^{10} + C$ mit C eine reelle Zahl wäre richtig.

Aufgabe 21

Gegeben ist $G(x) = 3e^{5x}$. Bestimme die Stelle, an der die Tangente parallel zur Geraden $y = 2x - 4$ ist.

- -

$G'(x) = 15e^{5x}$, dies sollte 2 sein. Also $15e^{5x} = 2$ somit $x = \frac{\ln(2)-\ln(15)}{5} = 0.2\ln(2/15) \approx -0,4$.

Aufgabe 22

Ein Quader hat Seitenlängen $a = 4cm$, $b = 5cm$ und $c = 2\sqrt{10}$. Von einem Würfel sind die Kanten genau so lange, wie die Diagonalen vom Quader sind. Berechne das Volumen des Würfels.

- -

$d^2 = 4^2 + 5^2 + (2\sqrt{10})^2 = 81$ somit $d = 9$ daher Volumen des Würfels $9^3 = 729cm^3$.

Aufgabe 23

Die Funktion $h(x) = \frac{3x-9}{x^2+2}$ hat eine Nullstelle bei $x = 3$. Bestimme den Winkel unter dem der Graph von h die x-Achse schneidet!

- -

$h'(x) = \frac{3(x^2+2)-2x(3x-9)}{(x^2+2)^2}$ sodass $h'(3) = \frac{3(3^2+2)-0}{(3^2+2)^2} = \frac{33}{121}$. Somit ist der Winkel dann $\arctan(33/121) \approx 15,3^o$.

Aufgabe 24

Stelle die Funktionsvorschrift $y = kx + d$ für die Tangente an dem Graphen der Funktion $f(x) = x^4 - x^2$ im Punkt $(2|12)$ auf.

- -

$f'(x) = 4x^3 - 2x$. Also $f'(2) = 4 \cdot 8 - 4 = 28$. Also $k = 28$ sodass $y = 28x + d$. Für $x = 2$ sollte $y = 12$ sein, somit $12 = 28 \cdot 2 + d$ und daher $d = -44$ also $y = 28 \cdot y - 44$.

Aufgabe 25

Von einer Funktion vom Typ $f(x) = a \cdot b^x$ ist bekannt, dass $f(0) = 3$ und $f(1) = 5$. Berechne a und b.

- -

$f(0) = a$ also $a = 3$. Bei $x = 1$ finden wir $5 = 3 \cdot b^1 = 3b$ also $b = 5/3$.