Aufgabe 1. (2P) **Zahlenmengen**.

Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussagen an!	
1. ☒	$-\sqrt{\frac{25}{81}} \in \mathbb{Q}$
2. ☐	$\sqrt{-\frac{25}{81}}$ ist ein Element der Menge $\mathbb{R}$.
3. ☐	$-\sqrt{25}$ ist ein Element der Menge $\mathbb{N}$.
4. ☒	$-\sqrt{81} \in \mathbb{C}$.
5. ☐	$i - \sqrt{4}$ liegt in der Menge $\mathbb{Z}$.

- -

Aufgabe 2. (2P) **Preisänderungen**.

Eine Ware kostet ursprünglich A Euro. Nachdem sie zuerst um 7% verteuert, anschließend um 12% verbilligt, und schließlich um 10 Euro in Preis reduziert wurde, kostet sie E Euro. Stellen Sie eine Formel für E auf!

$E = 1,07 \cdot 0,88 \cdot A - 10(= 0,9416A - 10)$ (Euro).

- -

Aufgabe 3. (2P) **Normale und parallele Geraden**. Gegeben sind die Geraden:

$g : 2x + y = 4$

$$h : \; X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Ergänzen Sie durch Ankreuzen den folgenden Text so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Die Geraden g und h sind ____①____ , da ____②____.

Möglichkeiten für ①	
identisch	☐
zueinander normal	☐
zueinander parallel	☒

Möglichkeiten für ②	
ihre Normalvektoren zueinander parallel sind	☒
ihre Richtungsvektoren normal auf einander stehen	☐
sie einen gemeinsamen Punkt haben.	☐

- -

Aufgabe 4. (2P) **Ermitteln einer Termdarstellung**. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^3 + bx + 2$ mit b, c reelle Zahlen.

Der Graph von f geht durch den Punkt $(2|0)$ und hat dort die Steigung 2. Ermitteln Sie die Parameter a und b und geben Sie die zugehörige Termdarstellung von f an.

Aus $f'(2) = 2$ folgt $3a2^2 + b = 12a + b = 2$. Aus $f(2) = 0$ folgt $8a + 2b + 2 = 0$ also $b = -1 - 4a$. Das in die vorige Gleichung substituieren ergibt $a = \frac{3}{8}$ und $b = -\frac{5}{2}$, sodass $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{5}{2}x + 2$.

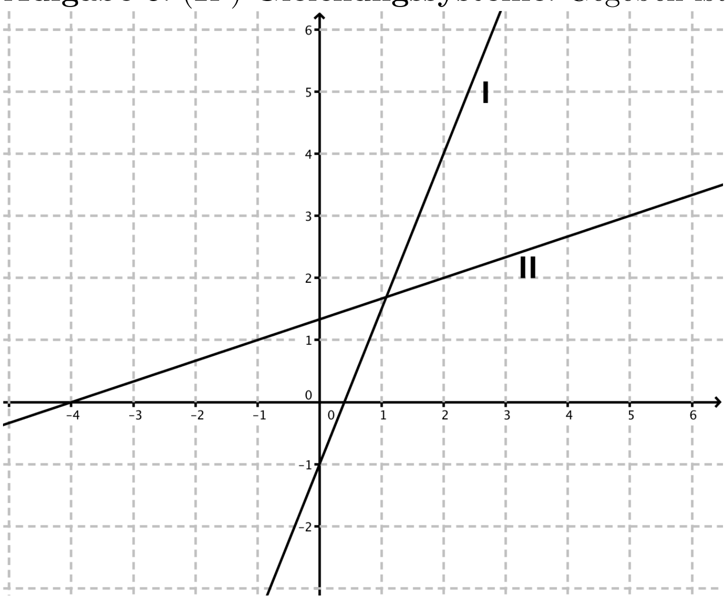
- -

Aufgabe 5. (2P) **Exponentialfunktion**. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3e^{-2x}$. Entscheiden Sie, welche der untenstehenden Aussagen auf f zutreffen.

Aussage	Trifft zu
Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.	Ja
Die Tangente an der Stelle $x = 0$ hat Steigung 0.	
Die Funktion ist monoton fallend.	Ja
Der Graph der Funktion hat eine Rechtskrümmung.	
Die Funktion ist periodisch.	

- -

Aufgabe 6. (2P) **Gleichungssysteme**. Gegeben ist folgende grafische Darstellung:



Geben Sie ein dieser Grafik entsprechendes lineares Gleichungssystem mit den Variablen x und y sowie die Lösung dieses Gleichungssystems an!

Gleichungssystem I: $y = \frac{5}{2}x - 1$

II: $3y - x = 4$

Lösung $x = \frac{14}{13}$ $y = \frac{22}{13}$

- -

Aufgabe 7. (2P) **Definitionsbereiche**. Gegeben sind fünf reelle Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 und f_5. Ermitteln Sie zu diesen Funktionen jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich D!

$f_1(x) = \frac{x}{5} - 1$	$D = \mathbb{R}$
$f_2(x) = -\sqrt{x+1}$	$D = [-1, \infty)$
$f_3(x) = {}^5\log(x)$	$D = \mathbb{R}^{>0} = (0, \infty)$
$f_4(x) = -\frac{5}{3-x^2}$	$D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\} = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$
$f_5(x) = 5x^{-3}$	$D = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- -

Aufgabe 8. (2P) **Ableitungen**. Gegeben sind vier reelle Funktionen. Ordnen Sie jede Funktion der richtigen ersten Ableitung zu!

Funktionen	
$f(x) = 3e^x$	A
$f(x) = e^{-3x}$	B
$f(x) = e^x + 3$	C
$f(x) = -\frac{1}{3}e^{3x}$	D

Ableitungen	
$f'(x) = -e^{-x}$	
$f'(x) = 3e^{-3x}$	
$f'(x) = -e^{3x}$	D
$f'(x) = 3e^x$	A
$f'(x) = -3e^{-3x}$	B
$f'(x) = e^x$	C

- -

Aufgabe 9. (2P) **Ableitung verschiedener Funktionen.** Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$. Vervollständigen Sie durch Ankreuzen die Aussage so, dass sie korrekt ist!

Für die Funktion ____①____ ist die erste Ableitung ____②____.

Zwei Optionen (A und B):

Möglichkeiten für ①	
$g(x) = f(2x)$	A
$g(x) = f(\frac{x}{2})$	B
$g(x) = 2f(x)$	

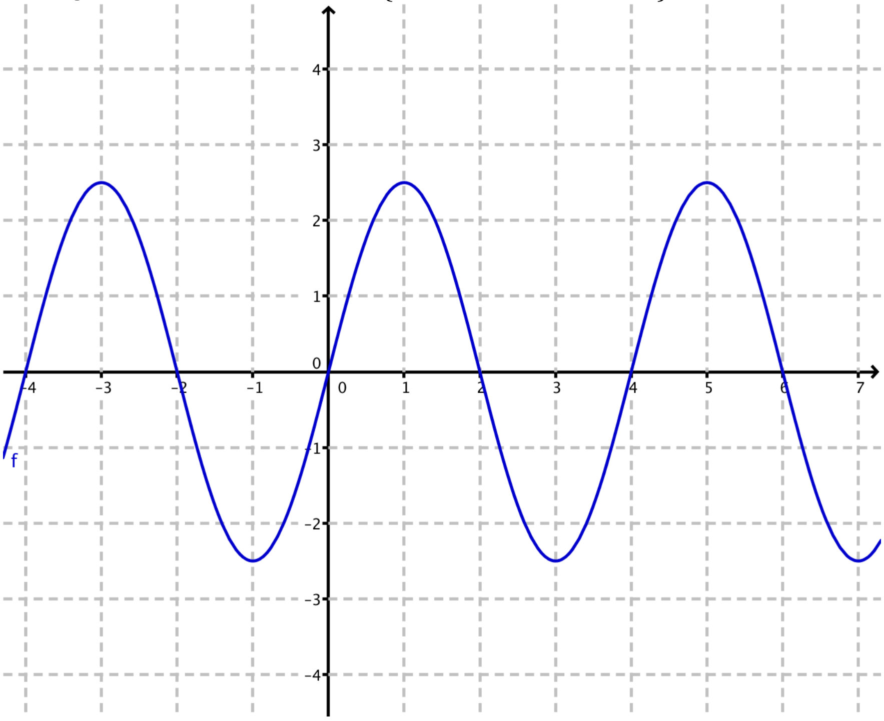
Möglichkeiten für ②	
$g'(x) = \frac{x}{2}$	B
$g'(x) = 2x$	
$g'(x) = 8x$	A

- -

Aufgabe 10. (2P) **Exponentialfunktionen und ihre Eigenschaften**. Gegeben ist die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$, wobei $a > 0$.

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!	
1. ☐	$f(x+1) = f(x) + a$.
2. ☐	$f(x+1) = f(x) + f(1)$.
3. ☒	$f(x+1) = a \cdot f(x)$.
4. ☒	$\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$ für $h \in \mathbb{R}$.
5. ☒	$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{a}$.

Aufgabe 11. (2P) **Allgemeine Sinusfunktion**. Gegeben ist die reelle Funktion Funktion f mit $f(x) = 2,5 \cdot \sin(\frac{\pi x}{2})$.
Skizzieren Sie den Graphen von f im Koordinatensystem! Die Nullstellen, lokalen Extremstellen und Wendestellen müssen richtig eingezeichnet werden!
Amplitude $= 2,5$, Nullstellen (also auch Wendestellen): $x \in \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$, Extremstellen sind genau dazwischen $x \in \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$.



Aufgabe 12. (2P) **Zweite Ableitungen**. Gegeben sind vier reelle Funktionen. Ordnen Sie jede Funktion der richtigen zweiten Ableitung zu!

Funktionen	
$f(x) = 4\sin(3x)$	A
$f(x) = x^2 + \sin(3x)$	B
$f(x) = \sin(6x)$	C
$f(x) = 2x + \sin\left(\frac{6x}{2}\right)$	D

Ableitungen	
$f''(x) = -9\sin(3x)$	D
$f''(x) = -36\sin(6x)$	C
$f''(x) = -36\sin(\frac{6x}{2})$	A
$f''(x) = -2\sin(3x)$	
$f''(x) = 2 - 9\sin(3x)$	B
$f''(x) = 2x - \cos(3x)$	

Aufgabe 1.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie spielt folgende Funktion eine sehr wichtige Rolle:

$$f(x) = e^{-a(x-m)^2}\,, \qquad a, m \in \mathbb{R}, \quad a > 0\,.$$

(a) (2P Kompensationspunkte) Ermitteln Sie die Extremstellen dieser Funktion und drücken Sie dabei die Stelle in a und m aus.

(b) (2P) Untersuchen Sie die Funktion f auf Monotonie; beantworten Sie im Besonderen die Frage, in welchen Intervallen f monoton steigend bzw. monoton fallend ist.

(c) (2P) Ermitteln Sie die Wendestellen dieser Funktion und drücken Sie dabei die Stelle in a und m aus.

(d) (2P) Zeigen Sie, dass $f(m+h) = f(m-h)$, und interpretieren Sie diese Eigenschaft von f.

(e) (2P) Skizzieren Sie für den Fall $m = 0$ und $a = 1$ den Graphen von f so, dass Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen gut ersichtlich sind, so wie das Vorhanden sein von Asymptoten. Überlegen Sie sich die Grenzwerte $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ genau!

Hinweise: (1) $e^u > 0$ für alle $u \in \mathbb{R}$. (2) $a(x-m)^2$ ist für $a > 0$ immer positiv (warum?). (3) Benutze beim Differenzieren die Verknüpfungsregel, und für die zweite Ableitung auch noch die Produktregel!

(a) Man kann hier benutzen, dass die Ableitung von $g(x) = e^{h(x)}$ durch $g'(x) = h'(x)e^{h(x)}$ – Verknüfpfungsregel, diese Regel wurde euch erklärt (!). Hierbei sollte man bedenken, dass die Ableitung von $-a(x-m)^2$ durch $-2a(x-m)$ gegeben ist. Daher $f'(x) = -2a(x-m)e^{-a(x-m)^2}$. Dieser Term $-2a(x-m)e^{-a(x-m)^2}$ kann nur verschwenden wenn $x - m = 0$, denn $a > 0$ und $e^u > 0$ für alle $u \in \mathbb{R}$, siehe Hinweis 1. Tatsächlich hat ja die Funktion e^x keine Nullstellen. Zusammenfassend: $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = m$.

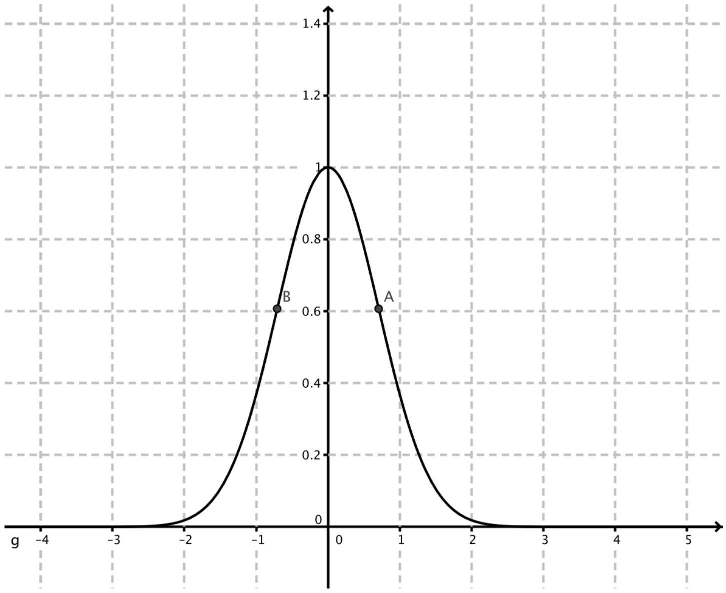
Achtung: Alternativ: Da $(x-m)^2$ immer positiv ist, ist der Term $e^{-a(x-m)^2}$ immer kleiner 1, und genau eins, wenn der Exponent verschwindet, also wenn $x = m$. Daher ist bei $x = m$ ein Maximum, und umso mehr sich x von m entfernt, desto größer wird $(x-m)^2$, und desto kleiner wird $f(x)$.

(b) Da $a > 0$ und $e^{-a(x-m)^2} > 0$ (Hinweis 1) gilt, dass das Zeichen von $f'(x)$ durch das Zeichen von $-a(x-m)$ bestimmt wird. Also, $f'(x) = -a(x-m)e^{-a(x-m)^2}$ ist positiv (bzw. negativ), wenn $-(x-m)$ positiv (bzw. negativ ist). Daher: $f'(x) < 0$ falls $x > m$ und $f'(x) > 0$ falls $x < m$. Also, $f'(x) = -a(x-m)e^{-a(x-m)^2}$ ist positiv (bzw. negativ), wenn $-(x-m)$ positiv (bzw. negativ ist).

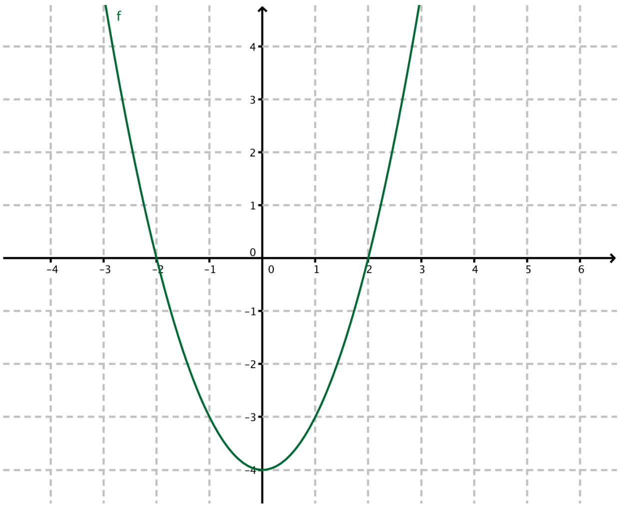
(c) Die zweite Ableitung erfordert die Produktregel: $f''(x) = -2ae^{-a(x-m)^2} + 4a^2(x-m)^2e^{-a(x-m)^2} = e^{-a(x-m)^2}(-2a+4a^2(x-m)^2)$. Dies verschwindet nur wenn $-2a+4a^2(x-m)^2 = 0$, und somit nur wenn $4a^2(x-m)^2 = 2a$, also $(x-m)^2 = \frac{1}{2a}$ also $x - m = \pm\frac{1}{\sqrt{2a}}$, also $x = m \pm \frac{1}{\sqrt{2a}}$. In Worten, also einen Schritt $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ links vom Maximum $x = m$ und einen Schritt $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ rechts vom Maximum $x = m$.

(d) Betrachte den Exponent $(x-m)^2$, dies ist eine Parabel mit Symmetrieachse bei $x = m$. Also, jetzt formal $f(m+h) = e^{-a(m+h-m)^2} = e^{-ah^2}$ und $f(m-h) = e^{-a(m-h-m)^2} = e^{-a(-h)^2} = e^{-ah^2}$ und diese beiden Ausdrücke sind gleich! Dies bedeutet tatsächlich, dass der Graph um h links von $x = m$ dasselbe ist wie an der Stelle um h rechts von $x = m$. Somit ist die Gerade $x = m$ eine Symmetrieachse des Graphen der Funktion f.

(e) Die Asymptoten sind nur die x-Achse für $x \to \pm\infty$. Die Wendestellen sind bei $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (A und B) und die einzige Extremstelle ist das Maximum bei $x = 0$. Beachte die Symmetrie $x \mapsto -x$.



Aufgabe 2. (3P)
In untenstehender Figur ist der Graph der Funktion $f(x) = x^2 - 4$ dargestellt. Für jeden Punkt P auf dem Graphen von f ist d_P die Distanz zwischen P und dem Ursprung. Finden Sie die zwei Punkte P_1 und P_2 auf dem Graphen von f, welche eine minimale Distanz d_P zum Ursprung haben.



Jeder Punkte auf dem Graphen ist von der Form $(x|x^2 - 4)$. So ein Punkt hat Distanz $d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2-4)^2}$ zum Ursprung. Wenn wir $d(x)$ maximalisieren/minimalisieren, können wir auch $d(x)^2$ maximalisieren/minimalisieren (da die Wurzelfunktion monoton steigend ist). Also, wir differenzieren die Funktion $g(x) = x^2 + (x^2-4)^2$, und (mit oder ohne zu erst ausmultuplizieren) ergibt: $g'(x) = 2x + 4x(x^2-4) = 4x^3 - 14x$. Wenn wir lösen $4x^3 - 14x = 0$ sehen wir gleich, dass $x = 0$ eine Lösung ist, und danach dividieren wir dann durch $2x$ und bekommen $2x^2 - 7 = 0$, also $x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$.
Jetzt schauen wir uns den Graphen an, die Punkte bei $x = \pm\sqrt{7/2}$ scheinen die Minima zu sein, aber was ist mit $x = 0$? Das ist wieder ein Maximum! Zwar ein lokales und kein globales, aber ein Maximum. Also, $P_1 = (-\sqrt{\frac{7}{2}}| - \frac{1}{2})$ und $P_2 = (\sqrt{\frac{7}{2}}| - \frac{1}{2})$.
- -

Aufgabe 3. (3P, wovon zwei Kompensationspunkte für die Formel der Fläche in nur einer Variable.)
Eine Dose mit einem Inhalt von 1L hat die Form eines Zylinders. Um Wärmeverluste zu minimalisieren, sind die Abmessungen so zu wählen, dass der Flächeninhalt minimal ist. Bestimmen Sie Radius und Höhe der Dose so, dass der Flächeninhalt minimal ist!

Da $V = \pi r^2 h = 1dm^3$, wissen wir $h = \frac{1}{\pi r^2}(dm)$. Die Fläche ist $O = 2\pi rh + 2\pi r^2$ und h substituieren ergibt $O(r) = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$. Differenzieren ergibt $O'(r) = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r$, sodass $O'(r) = 0$ genau dann, wenn $\frac{2}{r^2} = 4\pi r$ also $\frac{1}{2\pi} = r^3$ und daher $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0,54dm$, und somit $h \approx \frac{1}{3{,}14 \cdot 0{,}54} \approx 0,59$, also $r = 5,4cm$ und $5,9cm$.

Aufgabe 4.

Die Krankheit Efbola wird durch Zecken auf Menschen übertragen. Falls eine Person infiziert wird, dauert es etwa 4 Tage bevor die Person die Symptome hat, und die Krankheit bei ihr ausbricht. Die Krankheit Efbola ist höchst infektiös und lebensgefährlich. Im Land Miberia ist August 2041 die Krankheit Efbola ausgebrochen und in November 2041 gab es folgende Daten:

Monat	Gesamtheit der Erkrankungen	Gesamtheit der Sterbefälle
August	230	151
September	452	367
Oktober	850	676

(a) (2P Kompensationspunkte) Die Sterberate einer Krankheit gibt an, wie viele Prozent der mit der Krankheit infizierten Menschen an der Krankheit sterben. Finden Sie einen guten Schätzwert für die Sterberate von Efbola.

(b) (3P) Die Ärztin Heiny Hose nimmt an, dass das Finden eines geeigneten Medikaments etwa 10 Monate dauern kann, und dass sich die Krankheit ab dem zweiten Monat linear ausdehnt. Das bedeutet, dass ab dem zweiten Monat das Wachstum der Gesamtheit der Krankheiten laut H. Hose linear zu beschreiben ist. Bestimmen Sie, wie viele Personen laut H. Hose bis zum Finden eines geeignete Medikaments an der Krankheit erkranken und wie viele bis dahin sterben werden.

(c) (3P) Die WHO ist bezüglich des Findens eines geeigneten Medikaments mit Frau Dr.[a] H. Hose einverstanden, nur nimmt sie ein exponentielles Wachstum ab dem zweiten Monat an. Bestimmen Sie, wie viele Sterbefälle es laut der WHO bis zum Zeitpunkt des Findens eines geeigneten Medikaments geben wird. Ermitteln Sie auch, wie weit die Prognosen der Sterbefälle von H. Hose und der WHO nach 10 Monaten auseinander liegen.

(a) In August war die Sterberate $\frac{151}{230} \cdot 100\% \approx 66\%$ und in September war sie $\frac{367}{452} \cdot 100\% \approx 81\%$, und in Oktober $79,5\%$. Somit ist ein guter Schätzwert rund die 75%.

(b) Von September auf Oktober kommen $850 - 452 = 398$ Erkrankungen dazu. In 10 Monaten also 3980. Nehmen wir September als Monat 'Null', dann $3980 + 452 = 4432$. Gehst du davon aus, dass man meint, 10 Monate nach Oktober kommt erst das Medikament, dann also $3980+850 = 4830$. Mit den Todesfällen geht es genau so, $367 + 10(676 - 367) = 3457$, oder ab Oktober: $676 + 10(676 - 367) = 3766$. Beide Möglichkeiten sind für mich ok, es geht mir um das mathematische Argument!

(c) Nehmen wir September als Monat $t = 0$, dann $f(t) = a \cdot b^t$, dabei $a = f(0) = 367$ und $f(1) = ab = 367 \cdot b$, welches 676 gleich sein soll, somit $b = \frac{676}{367} \approx 1,84$.

Somit kommen jeden Monat 84% dazu! Fast eine Verdoppelung also!

Aber, dann $f(10) = (1,84)^{10} \cdot 367 \approx 163.247$ (und für zehn Monate ab Oktober brauchst du $f(11)$). Der Unterschied mit der Prognose von H.H. ist gewaltig, denn sie liegen sehr weit auseinander, 163.247 versus 3457 (bzw. 306.904 versus 3766), sodass der Unterscheid absolut gesehen $163.247 - 3457 = 159.790$, oder, schöner ausgedrückt, da $159.790 : 3457 \approx 46$ kann man besser sagen, die zwei Prognosen liegen um einen Faktor 46 auseinander!