Vierte Schularbeit Mathematik
Klasse 7D WIKU am 21.05.2015

Korrekturvorlage

Notenschlüssel:
Falls die Summe der erzielten Kompensationspunkte im zweiten Teil und des ersten Teils weniger als 16 ist, so ist die Note `Nicht Genügend`. Falls diese Summe 16 oder mehr beträgt, dann wird folgender Notenschlüssel benutzt:

NOTENSCHLÜSSEL	
41 - 48 Punkte	Sehr Gut (1)
33 - 40 Punkte	Gut (2)
25 - 32 Punkte	Befriedigend (3)
16 - 24 Punkte	Genügend (4)

Aufgabe 1. (2P) **Vorzeichen der Ableitung**. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 5 - 2x^2$.

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!	
1. ☐	$f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
2. ☐	$f(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^-$.
3. ☒	$f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$.
4. ☐	$f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
5. ☒	$f''(0) \neq 0$.

Aufgabe 2. (2P) **Kartoffelkauf**. Bei einem Bauer kauft man 1 kg Kartoffeln um nur 0,38€. Für die Fahrtkosten hin und zurück müssen allerdings noch 7,40€ veranschlagt werden. Kauft man 1 kg derselben Kartoffelsorte im Supermarkt um die Ecke, so bezahlt man pro Kilogramm 0,52€.

Bei welcher Menge Kartoffeln zahlt es sich aus, die Reise zum Bauer zu unternehmen? Geben Sie eine Gleichung an, mit der Sie diese Fragestellung bearbeiten können und formulieren Sie eine Antwort für den gegebenen Kontext!

Gleichung: $0,38 \cdot x + 7,40 = 0,52 \cdot x$. (Pass auf! Gleichung, also keine Ungleichung!)

Antwort: $x \approx 52,9$ also ab etwa 53 Kilogramm zahlt es sich aus, die Reise zum Bauer zu unternehmen.

Aufgabe 3. (2P) **Wurf mit zwei Würfeln**. Gegeben sind die Ereignisse E_5 und E_8 beim Werfen mit zwei Würfeln.

E_5: Die Augensumme beträgt 5. E_8: Die Augensumme beträgt 8.

Ergänzen Sie durch Ankreuzen den folgenden Text so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Das Ereignis ______①______ , da ______②______.

Möglichkeiten für ①	
E_5 ist wahrscheinlicher als E_8	☐
E_8 ist wahrscheinlicher als E_5	☒
E_5 ist gleich wahrscheinlich wie E_8	☐

Möglichkeiten für ②	
für beide Ereignisse die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$ beträgt	☐
$\frac{5}{36} < \frac{8}{36}$	☐
„Augensumme 8“ auf mehr Weisen zu realisieren ist als „Augensumme 5“.	☒

Aufgabe 4. (2P) **Linkshändler**. In einer (sehr) großen Schule sind 25% der SchülerInnen Linkshändler. 40 SchülerInnen werden per Zufall ausgewählt und gefragt, ob sie Links- oder Rechtshändler sind.

Kreuzen Sie jene beiden Aussagen an, die sicher zutreffend sind.

Aussage	Trifft zu
Es ist nicht möglich, dass alle 40 Befragten Linkshändler sind.	
Die Wahrscheinlichkeit, dass die als letzte befragte Person Rechtshändler ist größer, als dass sie Linkshändler ist.	Ja
Die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten drei Personen Rechtshändler sind, ist 75%.	
Die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten zwei befragten Personen Linkshändler sind, liegt bei etwa $\frac{1}{16} \approx 0,06$.	Ja
Genau 10 der befragten Personen ist Linkshändler.	

Aufgabe 5. (2P) **Brillenträger**. Aus einer Studie bezüglich Augenqualität nehmen insgesamt 250 Personen teil. Folgende Tabelle liegt vor:

	Männer	Frauen	Summe
Trägt Brille	40	68	108
Trägt keine Brille	67	75	142
Summe	107	143	250

Aus der Gruppe wird zufällig eine Person ausgewählt. Es stellt sich heraus, diese Person trägt eine Brille. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person eine Frau ist!

Lösung: $\frac{68}{108} \approx 0,63$, also etwa 63%. NB: 62% ist eigentlich falsch, denn da wurde dann falsch gerundet!

Aufgabe 6. (2P) **Quadratische Gleichung in $\mathbb{R}$**. Gegeben ist die quadratische Gleichung in der Unbekannten x über die Grundmenge $\mathbb{R}$:

$$x^2 - 12x + q = 0\,, \qquad \text{mit } q \text{ eine reelle Zahl.}$$

Geben Sie an, für welche Werte von q die Gleichung zwei unterschiedliche Lösungen in $\mathbb{R}$ besitzt.

Lösung: $q < 36$.

Aufgabe 7. (2P) **Bargeld**. Laut einer Studie zahlt 40% der Menschen beim Supermarkt mit Bargeld. Zwischen 8:00 und 8:30 kommen 15 Kunden zu Kassa 1 beim Supermarkt „Killa“.

Kreuzen Sie diejenigen beiden Gleichungen an, mit denen man die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen kann, dass mindestens vier dieser Personen mit Bargeld zahlen.

$1 - P(X \geq 4) = \binom{15}{3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^{12} + \binom{15}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^{13} + \binom{15}{1} \cdot 0,4 \cdot 0,6^{14} + 0,6^{15}$	☒
$P(X \geq 4) = \binom{15}{4} \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^{11}$	☐
$1 - P(X \geq 4) = \binom{15}{11} \cdot 0,4^{11} \cdot 0,6^4$	☐
$P(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{15} \binom{15}{k} \cdot 0,4^k \cdot 0,6^{15-k}$	☒
$P(X \geq 4) = 0,4^4 \cdot 0,6^{11} + 0,4^3 \cdot 0,6^{12} + 0,4^2 \cdot 0,6^{13} + 0,4^1 \cdot 0,6^{14}$	☐

Aufgabe 8. (2P) **Sinusfunktion**. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4\sin(8x)$.

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!	
1. ☒	Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = -f(-x)$
2. ☒	Die (kleinste) Periode beträgt $\frac{\pi}{4}$.
3. ☐	Die Funktion f hat genau ein Maximum.
4. ☒	Die Funktion f ist stetig und periodisch.
5. ☐	Die Funktion f ist periodisch aber nicht stetig.

Aufgabe 9. (2P) **Lachsbestand**. Durch den intensiven Fischfang nimmt der Lachsbestand in Alaska jährlich um 10% ab.
Bestimmen Sie, ob es hier um eine lineare oder exponentielle Abnahme handelt, und berechnen Sie, wie viel Prozent des ursprünglichen Bestands in Alaska nach zwei Jahren noch vorhanden sind!

⋆ Abnahme ist: Exponentiell

⋆ Nach 2 Jahren noch vorhanden: $0,9 \cdot 0,9 = 0,81$ also 81%.

Aufgabe 10. (2P) **Kugeln aus der Urne**. Aus einer Urne mit zwei roten und drei schwarzen Kugeln werden ohne Zurücklegen zwei Bälle gezogen. Es sei X die Anzahl der dabei gezogenen roten Kugeln. Ordnen Sie jedem Ereignis ihre Wahrscheinlichkeit zu!

Ereignisse	
$X = 0$	A
$X = 1$	B
$X = 2$	C
$X > 2$	D

Wahrscheinlichkeiten	
1	
0	D
$\frac{1}{10}$	C
$\frac{3}{5}$	B
$\frac{2}{5}$	
$\frac{3}{10}$	A

Aufgabe 11. (2P) **Ableitung einer Polynomfunktion.** Vervollständigen Sie durch Ankreuzen die Aussage so, dass sie korrekt ist!

Für die Funktion $f(x) =$ ___①___ ist $f'(x) =$ ___②___.

Möglichkeiten für ①	
$7x^3 + 3x^7 + 21$	☒
$x^{21} - x^7 - x^3$	☐
$3x^3 + 7x^7 + 1$	☐

Möglichkeiten für ②	
$21(x^6 + x^2 + 1)$	☐
$21(x^6 + x^2)$	☒
$21x^{20} - x^6 - x^2$	☐

Aufgabe 12. (2P) **Gerade in der Ebene**. Gegeben ist die Gerade $g: \quad 3x + by = c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie b und c so, dass die Punkte $(1|2)$ und $(-1|5)$ auf der Geraden g liegen!

$b = 2$

$c = 7$

Vierte Schularbeit Mathematik Klasse 7D WIKU am 21.05.2015

Korrekturvorlage

TEIL II

Aufgabe 1.
Die Weihnachtsbeleuchtung eines Weihnachtsbaumes besteht aus 6 gelben und 6 roten Lämpchen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gelbes Lämpchen in weniger als in einer Woche kaputt geht, ist für alle gelben Lämpchen gleich und beträgt $p_1 = \frac{1}{50}$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein rotes Lämpchen in weniger als in einer Woche kaputt geht, ist für alle roten Lämpchen gleich und beträgt $p_2 = \frac{1}{20}$.
Ein Kunde hat die Weihnachtsbeleuchtung dieser Sorte gekauft und möchte sie eine Woche im Weihnachtsbaum leuchten lassen.

(a) (2 Kompensationspunkte) Sei X die Anzahl der gelben Lämpchen, die in weniger als in einer Woche kaputt gehen. Geben Sie einen Ausdruck (Term) für die Wahrscheinlichkeit, dass $X = k$.

$P(X = k) = \binom{6}{k}\frac{49^{6-k}}{50^6}$, oder ein äquivalenter Term wie $\binom{6}{k}\left(\frac{1}{50}\right)^k\left(\frac{49}{50}\right)^{6-k}$.

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie EX. Binomial $EX = np_1 = 6 \cdot 0,02 = 0,12$.

(c) (2 Punkte) Sei Y die Anzahl der roten Lämpchen, die in weniger als in einer Woche kaputt gehen. Berechnen Sie EY und $E(X+Y)$ und geben Sie dem Ergebnis für $E(X+Y)$ eine Interpretation. $EY = np_2 = 6 \cdot 0,05 = 0,3$ Also $E(X+Y) = EX + EY = 0,42$. Man erwartet, dass etwa 0,42 Lämpchen in der ersten Woche den Geist geben. Besser gesagt, in 100 vergleichbaren Fällen - wir kaufen zB 100 solche Produkte - werden wir also um die 42 Lämpchen, die in der ersten Woche kaputt gehen, erwarten.

(d) (2 Punkte) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $X = Y = 0$, also, dass in der ersten Woche die gekaufte Weihnachtsbeleuchtung ohne Unterbrechung leuchtet!

$P(X = 0) = \left(\frac{49}{50}\right)^6$ und $P(Y = 0) = \left(\frac{19}{20}\right)^6$. Das Produkt dieser zwei Zahlen ist das Ergebnis, welche etwa $0,65$ beträgt. Es ist also mit 65%-er Wahrscheinlichkeit, dass die erste Woche ohne kaputte Lämpchen vorbei geht.

Aufgabe 2.
Eine Person würfelt zweimal mit einem ehrlichen Würfel.

(a) (2 Kompensationspunkte) Geben Sie einen geeigneten Ereignisraum an. Alle Zahlenpaare (a, b) mit $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, oder besser, $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (6, 6)\}$

(b) (2 Punkte) Sei X_1 die Augenzahl des ersten Wurfs, X_2 die Augenzahl des zweiten Wurfs. Berechnen Sie den Erwartungswert von $X_1 + X_2$.

$E(X_1 + X_2) = 2EX_1 = 2 \cdot \frac{1+2+3+4+5+6}{2} = 7.$

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Varianz von $X_1 + X_2$! $Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) = 2Var(X_1)$ und

$Var(X_1) = \frac{(2{,}5)^2+(1{,}5)^2+(0{,}5)^2+(0{,}5)^2+(1{,}5)^2+(2{,}5)^2}{6} = 2\frac{11}{12}$ sodass $Var(X_1 + X_2) = 5\frac{5}{6}$. Mit einer Tabelle geht auch!

(d) (2 Punkte) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $X_1 \leq 3$ wenn gegeben ist, dass X_1+X_2 kleiner als 6 ist.

Hier muss man zuerst mal alle Möglichkeiten mit $X_1 + X_2 < 6$ aufschreiben:

zuerst mal die mit $X_1 = 1$: $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 5)$.

dann mit $X_1 = 2$: $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$.

dann mit $X_1 = 3$: $(3, 1)$, $(3, 2)$.

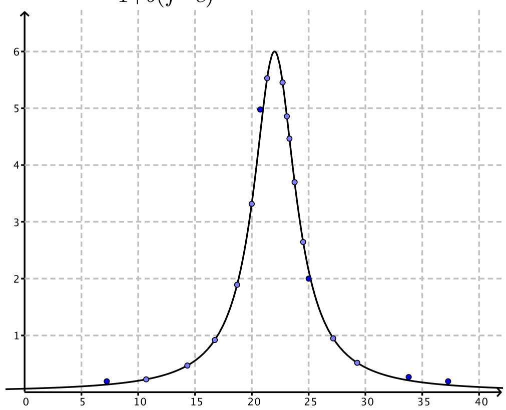
und dann mit $X_1 = 4$: $(4, 1)$.

Wir sehen, dass sind zehn Zahlenpaare und nur eins davon hat nicht $X_1 \leq 3$. Also 9 von 10 sind günstig. Daher $P(X_1 \leq 3 | X_1 + X_2 < 6) = 0,9$.

Aufgabe 3.
Um das Schwingverhalten einer Brücke zu testen, wird eine Maschine mit einer großen bewegbaren Masse auf die Brücke gegeben. Diese Masse wird in Schwingung versetzt, sodass die Brücke einigermaßen mitschwingt. Die Amplitude, mit der die Brücke (an einem geeignet gewählten Punkt auf der Brücke) mitschwingt, wird dann gemessen. Diese Messung wird für viele verschiedene Frequenzen durchgeführt, sodass man weiß, mit welcher Amplitude die Brücke mitschwingt, wenn sie in eine gegebene Schwingung versetzt wird.
Aus der allgemeinen Theorie ist bekannt, dass das Ergebnis so einer Messung von der Form

$$A(f) = \frac{a}{1 + b(f-c)^2}$$

ist, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ und f in Hz, A in cm angegeben ist. Ziel der Messung ist es, die Parameter a, b und c für die Brücke herauszufinden.
Im Diagramm sehen Sie das Ergebnis der Messung, und die best passende Funktion von der Form $A(f) = \frac{a}{1+b(f-c)^2}$ wurde eingezeichnet.



(a) (2P Kompensationspunkte) Lesen Sie aus dem Diagramm ab, wo $A'(f) > 0$, wo $A'(f) = 0$ und wo $A'(f) < 0$.

$f < 22$, dann $A'(f) > 0$; $f = 22$, dann $A'(f) = 0$ und wenn $f > 22$, dann $A'(f) < 0$.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie durch Differenzieren, dass $A(f)$ genau ein Extremum hat, und drücken Sie die Stelle des Extremums in a, b und c aus. Berechnen Sie damit den maximalen Wert, den $A(f)$ annehmen kann.

$A'(f) = -\frac{2ab(f-c)}{(1+b(f-c)^2)^2}$, und das verschwindet nur, wenn der Zähler Null ist, also $ab(f-c) =$ und da $a, b > 0$ finden wir $f = c$. Das heißt, es gibt nur ein Extremum, und zwar bei $f = c$, also $c = 22$. Und wir sehen auch $A(c) = \frac{a}{1+b(c-c)^2} = a$, also $a = 6$.

(c) (2 Punkte) Lösen Sie die Gleichung $A(f) = \frac{a}{2}$ nach f und drücken Sie das Ergebnis in b und c aus.

$\frac{a}{1+b(f-c)^2} = \frac{a}{2}$ ergibt $1 + b(f-c)^2$ also $f = c \pm \frac{1}{\sqrt{b}}$.

(d) (2 Punkte) Benutzen Sie die obigen Befunde um a, b und c zu bestimmen.

Es fehlt uns noch b. Schauen wir bei $A = \frac{a}{2} = 3$, da sehen wir zwei Punkte: $f \approx 19,9$ und $f \approx 24,1$ (oder ähnliches) also bei $f = 22 \pm 2,1$. In anderen Worten, auf halber Höhe liegt der Graph 2,1 links und rechts vom Maximum. Also $\frac{1}{\sqrt{b}} = 2,1$ und das können wir lösen, sodass $b \approx 0,2$.