Gleichungen und Geometrie

Geraden

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$$

Eigenschaften

(1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ist Normalvektor

<u>Beweis</u>: seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ zwei Punkte auf der Geraden, sodass $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ parallel zum Richtungsvektor ist. Dann $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) =$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = c - c = 0. \quad \boxtimes$$

(2) $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor.

(3) Einen "Fußpunkt" findet man immer:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{c}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \left(\text{falls } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Verallgemeinerung:

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d \qquad \underline{\text{Ebene}}$$

zB $x = 0$, $x = 1$, $x + y + z = 1$

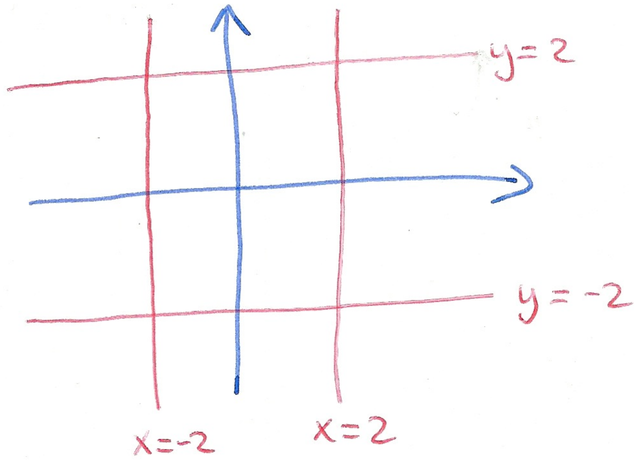
(1) Normalvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

(2) Falls 2 Ebenen nicht parallel sind, schneiden sie sich in einer Geraden

(3) Seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ zwei Vektoren die eine Ebene aufspannen: Normalvektor $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

Gleichungen und Geometrie

Quadrat • $|x| = 2$ $\quad |y| = 2$



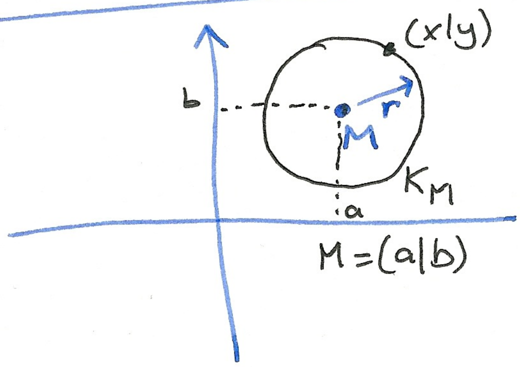
• Zeichne selbst:

a) $|x-3| = 1$ $\quad |y-2| = 2$

b) $|x-3| \leq 1$ $\quad |y-2| \leq 2$

c) Beschreibe a) & b) in Worten

Kreis



$$(x|y) \in K_M$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathrm{Dist}\big((x|y), (a|b)\big) = r$$

Kugel Idem, nur in 3D:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

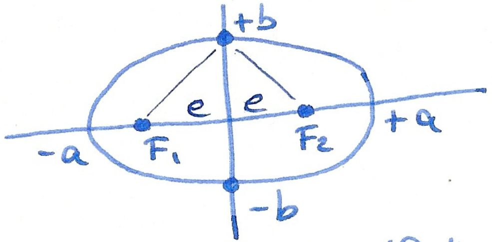
$(a|b|c)$ Mittelpunkt, Radius r

Quader $Q = \{(x|y|z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = \frac{a}{2}, |y| = \frac{b}{2}, |z| = \frac{c}{2}\}$

Ellipse

"Distorted Circle"

Standard: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

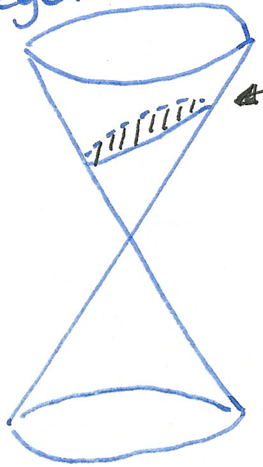


- $e^2 = a^2 - b^2$ (falls $a \geq b$)

  $\frac{e}{a} :=$ Exzentrizität

- Falls $a = b \Rightarrow$ Kreis und $e = 0$.

- Kegelschnitt:



Schief, aber nicht zu schief durchgeschnitten

Hyperbel

- $x \cdot y = k^2$ (Form 1)
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Form 2a)

  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Form 2b)

"1=2"

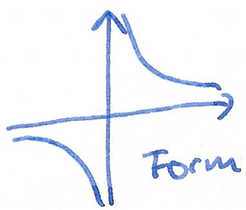
$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

$(bx - ay)(bx + ay) = a^2b^2$

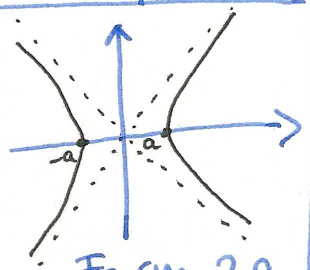
$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \downarrow$

$u \cdot v = k^2$

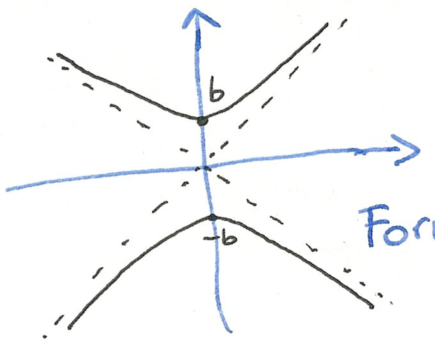
neues x · neues y



Form 1



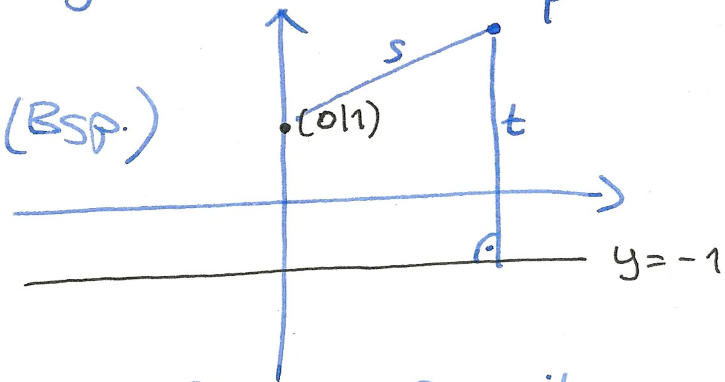
Form 2a



Form 2b

Parabel

- $y = x^2$
- (Bsp.)



alle Punkte P mit ~~ddd~~ $s = t$ liegen auf einer Parabel

$s^2 = x^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$

$- \quad t^2 = (y+1)^2 = y^2 + 2y + 1$

$s^2 - t^2 = x^2 - 4y$

Daher $x^2 = 4y$, $y = \frac{1}{4}x^2$.

- Auch Hyperbel und Parabel sind Kegelschnitten.