Planungsblatt Mathematik für die 7D

Woche 6 (von 06.10 bis 10.10)

Aufgaben & Aufträge [1]

Bis Mittwoch 08.10:
Mache die Aufträge A1 bis A5 von der Fehleranalyse hier unten. A5 ist mir **ABZUGEBEN**. (Am Anfang der Stunde, as usual.)

Bis Freitag 10.10:
(i) 1.08(a), 1.09(a)
(ii) Schreibe 5 von den selbst erstellten Aufgaben schön auf, und **GIB SIE MIR**. Ich will davon ein Bündel mit SA-Übungsaufgaben machen.

Bis Dienstag 14.10:
Erledige die Aufgaben 1.11(a)(b), 1.13 und 1.20 bis 1.25

Kernbegriffe dieser Woche:

Gleichungen, Mengen, reelle Zahlen versus Bruchzahlen, Polynome, Komplexe Zahlen, Imaginäre Zahlen, die komplexe Ebene, Norm, Komplex Konjugierte

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

- **(a)** Dienstag: (i) HÜ Bespr. – mit Korrektur, einige macht wer von euch an der Tafel (ii) Gruppenarbeit Korrektur der Prüfungssituation – A1 bis B4
- **(b)** Mittwoch: (i) HÜ Bespr. (ii) Gruppenarbeit Korrektur Prüfungssituation – B1 bis C2
- **(c)** Freitag: (i) HÜ Bespr. (ii) 1.11(a)(b), 1.13 und mit 1.20 bis 1.25 anfangen.

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

AB-W6: ANALYSE der FEHLER nach PRÜFUNGSSITUATION zum THEMA $\mathbb{C}$

A1. Suche dir die Aufgaben heraus, die du dachtest, richtig zu haben, die aber falsch waren.

A2. Suche dir die Begriffe heraus, mit denen du am meisten Punkte verpasst hast. ZB: Polardarstellung, Norm, komplex konjugierte Zahlen, Exponent $e^{i\varphi}$, Sinus/Cosinus, Mengen, Polynome, Lösungen von quadratischen Gleichungen, Diskriminante, Gleichungen, Wurzelfunktion...

A3. Suche dir heraus, bei welchen Berechnungen du Fehler gemacht hast. (Achtung: Bei $\tan(\varphi) = -2.4$ hast du dort den richtigen Winkel φ gefunden? Hast du gedacht $\sqrt{x^2+y^2} = x+y$?)

A4. Welche Themenbereiche musst du nochmal gut studieren?

A5. Schreibe jetzt in einem kurzen Bericht an mich, worin die Fehler bestanden haben. Benutze dabei A1, A2, A3 und A4.

B1. Fasse die Themen zusammen, bei denen du bei der Prüfungssituation die meisten Punkte verpasst hast.

B2. Suche im Buch Übungen zu diesen Themen. Wenn es Themen wie Bruchzahlen oder Wurzelziehen sind, dann bitte mir melden. Ich finde dann schon Übungen.

B3. Welche externe Faktoren haben für Fehler gesorgt? Stress, Kopfschmerzen, Zeitdruck, Unsicherheit, Vergesslichkeit, das Meeresschweinchen vom kleinen Bruder ist gestorben, Versagensangst, Druck von anderen Personen, ...

B4. Beschreibe einen Plan, wie du die Probleme beseitigen kannst. Welches Material brauchst du dazu? Wie kann ich dir dabei helfen? Ihr seit alt und weise genug; kommt mit einem guten Plan!

C1. Versuche in Ruhe eine Auswahl an Aufgaben (zB alle Dreifachen) nochmal zu machen. Vergleiche deine Leistung mithilfe der Korrekturvorlage.

C2. Ändere einige (mindestens 15) Aufgaben ein wenig, erstelle somit neue Aufgaben, und übe sie in Gruppen. Tausche die Aufgaben in Kleingruppen aus. Mache vor allem Aufgaben von dem Typen, mit denen du wenig Punkte erzielt hast.

Buchaufgaben

Liebe SchülerInnen,
Hier findest du eine Liste mit Buchaufgaben, die ich vorhabe, im Unterricht und in den Hausübungen zu behandeln. Diese Liste führe ich jeweils bis zu einer Schularbeit, damit der Schularbeitsstoff auch schon deutlich abzulesen ist. So hast du einen Überblick über die Aufgaben, die ich machen möchte, und die wir gemacht haben. Nach einer Schularbeit lösche ich diese Aufgaben dann, und dann kommen hier die Aufgaben für die nächste Schularbeit. ACHTUNG: Da Unterricht keine leicht vorhersagbare Sache ist, werde ich diese Liste langsam 'anbauen' (Thema nach Thema zum Beispiel) und gegebenenfalls anpassen. Sie ist somit gut als 'Führer' zu sehen, und nicht als 'Gesetz'. Oh ja, bevor ich es vergesse: Ich erstelle auch selbst viele Aufgaben. Und dazu: Ich benutze auch noch andere Bücher. Daher ist diese Liste wirklich nur die Liste der Aufgaben aus dem Buch "Mathematik Verstehen 7". Also, nur Teil des Stoffes einer SA. Aber das ist wahrscheinlich schon selbstverständlich.

- **Komplexe Zahlen**: 10.03, 10.04, 10.06(a)(b)(c), 10.08(a)(b), 10.10(a)(b)(d), 10.12(a)(b)(c)(f), 10.14(a)(b)(e)(g), 10.18(a), 10.19(a)(b) [Achtung: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ – wie heißt diese 'Regel'? – und somit auch leicht nachvollziehbar $(a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$], 10.20 [und fasse die Ergebnisse schön zusammen], Wir lesen Seiten 234 und 235, 10.23, 10.24(a)(b), 10.25(a)(b), 10.28, 10.30(a), 10.32(a)(b)(c)(d), Lesen 10.36, 10.39(a)(b)(c), Seite 240 und 241 sind zu lesen und sind Stoff – wir benutzen dann aber schon die Euler'sche Formel auf Seite 244, 10.44(a), 10.55(a), 10.56, 10.57(!), GRUNDWISSEN: 10.58 bis 10.67. GRUNDKOMPETENZEN: 10.68 bis 10.72.

- **Polynome**: 1.06(a)(b), 1.08(a), 1.09(a), 1.11(a)(b), 1.13, 1.20 bis 1.25, 1.27, 1.30(Die Aufgabe ist FALSCH formuliert, und nach den komplexen Zahlen solltet ihr das schon einsehen!), 1.32

Testsituation – Korrekturvorlage

NB Manche Angaben habe ich zwecks zukünftigen Lernens verbessert.

1 (3%)

Gib von folgenden zwei komplexen Zahlen die komplex konjugierten Zahlen: (a) $-7-8i$, (b) $9(1+2i)$.
(a) $-7+8i$ (b) $9(1-2i)$

2 (2%)

Welche der folgenden Gleichungen hat als (eine) Lösung i? (a) $2x^2+1=0$, (b) $x^2+2=0$, (c) $2(x^2+1)=0$, (d) $x^2-1=0$.
Nur (c).

3 (3%)

Welche Beziehung gilt zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$? Drücke dich in Worten aus!
Die reellen Zahlen bilden eine Untermenge von der Menge der komplexen Zahlen.

4 (4%)

Berechne: $(12+\frac{i}{2})(10+8i)$
$116-101i$

5 (3%)

Erkläre, wie man mit einer Ebene die komplexen Zahlen darstellen kann.
Am kürzesten: $z=a+bi$ identifiziert man mit dem Punkt $(a|b)$ der Ebene $\mathbb{R}^2$. Die horizontale Achse ist also die reelle Achse, die vertikale Achse ist die imaginäre Achse.

6 (3%)

Was ist die Norm (Betrag) einer komplexen Zahl? Gib eine deutliche Erklärung!
Die Distanz zum Ursprung. Wenn $z=a+bi$, dann ist die Norm $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$, also eine reelle, nicht negative Zahl.

7 (4%)

Drücke die Norm von $z=\frac{s+it}{s}$ in s und t aus, mit $s,t\in\mathbb{R}$.

$$|z|=\sqrt{\frac{s^2+t^2}{s^2}}$$

8 (4%)

Gegeben ist eine komplexe Zahl $z=a+bi$. Finde die Norm von $w=\frac{z}{\overline{z}}$.
Da $|z|=|\overline{z}|$ gilt $|w|=1$. Anders begründet: $|w|^2=w\overline{w}=\frac{z}{\overline{z}}\cdot\frac{\overline{z}}{z}=\frac{|z|^2}{|z|^2}=1$.

9 (4%)

Gegeben ist eine komplexe Zahl $z=a+bi$. Finde die Norm von $w=\frac{z}{|z|}$.
Man dividiert hier durch die Norm selbst, also $|w|=1$. Es ist wie ein Einheitsvektor. Ausrechnen geht auch: $|w|=|\frac{z}{|z|}|=\frac{|z|}{|z|}$, da $|z|$ eine reelle Zahl ist, somit kommt dann 1 raus.

10 (4%)

Welche Beziehung gibt es zwischen der Norm von z und von $\frac{1}{z}$.
Sie sind die Kehrwerte von einander. Betrag von z und von $1/z$ multiplizieren sich zu eins zusammen.

11 (3%)

Erkläre kurz die Polardarstellung von komplexen Zahlen.
Winkel mit der reellen Achse ist der Winkel φ, und die Distanz zum Ursprung ist die Koordinate r, somit lässt sich jede komplexe Zahl z wie $z = r\cos\varphi + ri\sin\varphi$ darstellen.

12 (3%)

Gib die komplexe Zahl $z = -5 + 12i$ in Polardarstellung.
$r = 13$, und ACHTUNG $\tan\varphi = -\frac{12}{5}$, dann kommst du auf $\varphi = -67, \ldots$ Grad. Nur, dein TR kann nur einen Wert geben. Wenn du $-5 + 12i$ im Koordinatensystem suchst, findest du $\varphi = 155, \ldots$ Grad. Da der Tangens von beiden Winkeln gleich ist, da der Tangens 180-periodisch ist, gibt er nur den einen Wert. Du brauchst den anderen! Trigonometry rules! Hier gilt also auch: ZUERST DENKEN, DANN TUN!!!!

13 (2%)

Wie viel Lösungen kann die Gleichung $x^5 - 4x^2 + 7x + 1 = 0$ maximal haben?
Ohne zu vile zu sagen: 5.

14 (7%)

Finde alle Lösungen von $x^2 + 2x + 3 = 0$.
Formel benutzen, oder $(x + 1)^2 + 2 = 0$ finden. Also $x_\pm = -1 \pm i\sqrt{2}$.

15 (5%)

Finde alle Lösungen von $(x - 2 - i)(x - 2 + 1)(x - 3) = 0$.
Hier gilt: SCHAU ES DIR GUT AN, und schalte das Gehirn ein. Wenn du das ausmultiplizierst, wird es nicht besser. Die Lösungen stehen da! $x = 2 + i$, $x = 2 - 1 = 1$ und $x = 3$.

16 (7%)

Finde alle Lösungen von $x^2 + 2x + 3 = 0$.
War schon.

17 (4%)

Berechne die Norm von $z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$.
Polardarstellung mit $r = 1$, also Norm ist 1. Oder, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ – denn Pythagoras.

18 (4%)

Gib eine Gleichung mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, die aber eine Lösung in $\mathbb{Q}$ hat.
Das sollte nicht falsch gehen! Dies nicht haben ist problematisch. zB $2x = 1$, $3x = 4$, $5x = 7$ usw.

19 (4%)

Gib eine Gleichung mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, die aber eine Lösung in $\mathbb{C}$ hat.
Was wäre mit $x^2 = -1$, oder die von 16 hier oben.

20 (7%)

Zeige, dass die Gleichung $(x-2a)^2+3a^4=0$ mit keine Lösung in $\mathbb{R}$ hat, wobei $a\in\mathbb{R}$, a nicht Null.
$3a^4$ ist positiv. Und $(x-2a)^2$ ist für reelle Zahlen auch immer positiv. Also zusamen nie null. Vergleiche $x^2+4=0$, oder $(x-2)^2+1=0$.

21 (4%)

Zerlege in Linearfaktoren $x^2+4x+20$.
$(x+2+4i)(x+2-4i)=|x+2+4i|^2=(x+2)^2+4^2=x^2+4x+20$

22 (4%)

Gib eine quadratische Gleichung mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ mit Lösungen $x_1=1+2i$ und $x_2=1-2i$.
Nimm $(x-1-2i)(x-1+2i)$ und multipliziere aus, dann $=0$ stellen.

23 (5%)

Gib eine quadratische Gleichung mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$, von der eine Lösung $x_1=5+i$ ist.
Die zweite Lösung ist somit $5-i$ also $(x-5-i)(x-5+i)=0$ und dann ausmultiplizieren.

24 (2%)

Gib a und b in $a+bi=1+2i+3+4i+6+7i=10+13i$. Also $a=10$ und $b=13$. Achtung. In Zukunft ist so eine Frage falsch beantwortet, wenn du nicht wirklich $a=\dots$ und $b=\dots$ aufschreibst, denn nach a und b wird gefragt.

25 (4%)

Was ist die Norm von $z=5e^{i\alpha}$? $(\alpha\in(0,\pi))$
Polardarstellung mit $r=5$, also 5. Norm von $e^{i\alpha}$ ist ja 1, es liegt auf dem Einheitskreis. Darf nicht mehr schief gehen!

26 (4%)

Bring auf die Form $a+bi$: $\dfrac{2+i}{-3+5i}$
$-\frac{1}{34}-\frac{13}{34}$

27 (4%)

Berechne das Produkt von $z=3e^{0,3\pi i}$ und $w=4e^{0,2\pi i}$.
Mit Polardarstellung: Radien werden multipliziert, Winkel aufaddiert: $3e^{0,3\pi i}4e^{0,2\pi i}=12e^{0,5\pi i}=12i$, denn $e^{0,5\pi i}=i$.

28 (4%)

Finde α in $i=e^{i\alpha}$. $(\alpha\in(0,\pi))$
$\alpha=\frac{\pi}{2}$, denn i liegt bei Winkel von 90 Grad, also bei $\pi/2$.

29 (8%)

Drücke die Lösungen in a aus $(a\in\mathbb{R})$: $x^2+2x+a^2=1$. Für welche a gibt es reelle Lösungen? Für welche a sind die Lösungen komplex?
$x^2+2x+a^2-1=0$, Diskriminante ist $4-4(a^2-1)=8-4a^2$. Also, wenn $a^2<2$, d.h $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$ ist die Diskriminante positiv und gibt es zwei reelle Lösungen, $x_\pm=-1\pm\sqrt{2-a^2}$. Wenn $a^2>2$, also wenn $a>\sqrt{2}$ oder $a<-\sqrt{2}$ gibt es zwei komplex konjugierte Lösungen $x_\pm=-1+i\sqrt{a^2-2}$. Wenn $a=\pm\sqrt{2}$, dann $x=-1$.

30 (8%)

Diskutiere die Lösungen von quadratischen Gleichungen $x^2 + 2px + q = 0$ mit p und q reelle Zahlen. Gib an, welche Rolle der Term $p^2 - q$ spielt.
$D = p^2 - q$ ist die Disktriminante, wenn sie positiv ist, gibt es zwei reelle Lösungen $x_\pm = -p \pm \sqrt{D}$ und wenn sie negativ ist gibt es zwei komplex konjugierte Lösungen $x_\pm = -p \pm i\sqrt{|D|}$ und wenn sie Null ist gibt es eine reelle Lösung $x = -p$.

31 (3%)

Gegeben ist, dass z die Norm 5 hat, und dass w die Norm 6 hat. Was ist die Norm von $z \cdot w$?
30

32 (4%)

Finde a und b in $a + bi = 5e^{0,1\pi i}$.
$a = 5\cos(0,1\pi)$ und $b = 5\sin(0,1\pi)$.

33 (4%)

Zeige, dass $x^4 - 1 = 0$ vier komplexe Lösungen hat. Hinweis: gib die vier Lösungen.
$(x^2)^2 = 1$, also $x^2 = \pm 1$, also $x = \pm i$ und $x = \pm 1$.

34 (4%)

Was ist problematisch am Ausdruck $\sqrt{-1} = i$?
$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{-1 \cdot -1} = 1$ aber auch $i \cdot i = -1$. Ein Problem also bei der Multiplikation und beim Verhalten der Wurzelfunktion $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

35 (2%)

Wann ist eine komplexe Zahl $a + bi$ imaginär?
Wenn $a = 0$.

36 (2%)

Wann ist eine komplexe Zahl $a + bi$ reell?
Wenn $b = 0$.

37 (4%)

Für welche komplexe Zahl z gilt $z\overline{z} = 0$?
Für $z = 0$.

38 (4%)

Was ist die Norm von $z = 5e^{i\alpha}$? ($\alpha \in [0, 2\pi)$)
War schon.

39 (2%)

Welche Werte kann i^n annehmen, für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$?
Die Werte $i, -i, 1, -1$.

40 (3%)

Löse die Gleichung $z \cdot i = 1$.
$z = -i$.

41 (4%)

Finde die komplex konjugierte Zahl von $z = \frac{2+3i}{10+15i}$.
Recht interessant, keiner (auch ich selbst zu erst nicht) sah, dass $z = \frac{1}{5}$, also auch $\bar{z} = \frac{1}{5}$.
Auch ok war: $\overline{z} = \frac{2-3i}{10-15i}$.