Könnensüberprüfung zu AG-Grundkompetenzen

`Antworten und Erklärungen`

ACHTUNG:

Bitte mir nichts glauben, sondern

ALLES SELBST NACHRECHNEN!

Alles, was du nicht selbst nachgerechnest und durchgedacht hast, hast du nicht verstanden. Im optimalen Fall versuchst du die Aufgaben am nächsten Tag noch einmal! Du musst alles dir selbst und einem anderen erklären können, sonst hast du es nicht verstanden. Überzeuge auf jeden Fall dich selbst, dass die Methode richtig ist. Niemals denken „... und dann muss man ...“, weil es einen Grund gibt, warum man das eine oder das andere machen kann. Jede Methode hat ihre Begründung, und nicht weil jemand das so sagt, sondern weil es logisch ist.

ALSO: GUT LERNEN, GUT VERSTEHEN, UND NOCHMAL VERSUCHEN!

(1). Gegeben ist die Gerade $g: \quad 2x - 3y = 5$ und gegeben ist die Gerade $h: \quad 4x + 3y = 7$. Berechne den Schnittpunkt.

⚠

Achtung! Hier ist ein Schnittpunkt zu bestimmen. Zwei Koordinaten sind gefragt also!

Diese Aufgabe ist mit Gleichungsmanipulationen zu lösen. Mir fällt auf, dass beide Gleichungen einen Term mit $3y$ haben, einmal mit Minus, einmal mit Plus. Also addiere ich die Gleichungen und bekomme dann

$$6x = 5 + 7 = 12$$

also $x = 2$. Das setze ich in eine der beiden ein

$$4 - 3y = 5$$

also $-3y = 1$ und somit $y = -\frac{1}{3}$.

Schnittpunkt ist somit $S = (2| - \frac{1}{3})$.

Was kann bei so einer Aufgabe schief gehen? Dass man sich verrechnet! Darum am Ende immer die Antwort kontrollieren! Also, Lösung einsetzen.

(2). Gegeben ist die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$ und die Gerade g gegeben durch

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t$$

wobei a so zu bestimmen ist, dass g eine Tangente an der Parabel ist.

Methode A: Die Tangente der Geraden g beträgt $\frac{1}{3}$. Um das zu wissen, kann man einfach zwei Punkte nehmen und dann $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ berechnen. Bei der Parabel ist die Steigung der Tangente an der Stelle x genau x, also $\frac{dy}{dx} = x$. Somit muss dann der Berührungspunkt bei $x = \frac{1}{3}$ sein. Dann gilt also $y = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{18}$.

Somit wissen wir, dass $(\frac{1}{3}|\frac{1}{18})$ auf g liegen muss. Aber dann wiisen wir

$$\frac{1}{3} = 0 + 3t\,, \qquad \frac{1}{18} = a + t$$

somit finden wir $t = \frac{1}{9}$ und somit muss a dann $a = \frac{1}{18} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{18}$.

Dies ist also die Diffenziermethode. Ist gut!

Methode B: Da die Gerade g eine Tangente ist, gibt es nur einen Schnittpunkt. Somit sollten wir die Parameterdarstellung in die Parabelgleichung einsetzen können und dann a so bestimmen, dass diese Gleichung nur eine Lösung hat. Also, eine Diskriminante muss Null sein!

Wir lesen ab: $x = 3t$ und $y = a + t$, diese setzen wir in $y = \frac{1}{2}x^2$ ein und bekommen

$$a + t = \frac{9}{2}t^2$$

und diese Gleichung darf nur eine Lösung haben. Wir schreiben um

$$0 = \frac{9}{2}t^2 - t - a$$

Dies ist eine quadratische Gleichung vom Typ $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a = \frac{9}{2}$, $b = -1$ und $c = -a$. Die Diskriminante muss Null sein, also bekommen wir

$$(-1)^2 - 4 \cdot \frac{9}{2} \cdot (-a) = 1 + 18a = 0$$

und somit $a = -\frac{1}{18}$.

Dies ist die algebraische Methode und sie ist schön!

(3) . Schreibe die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 4x < 0\}$ mithilfe von Intervallen an!

Die Bedingung $x^2 + 4x < 0$ ist als Intervall oder Vereinigung von Intervallen zu schreiben. Nun, $y = x^2 + 4x$ ist eine Parabel mit Faktorisierung $y = x(x + 4)$. Die Nullstellen liegen also bei $x = -4$ und $x = 0$. Da die Parabel nach oben geht (Koeffizient for x^2 ist 1, also positiv) ist $x^2 + 4x$ genau dann negativ, wenn $x \in (-4; 0)$.

Das heißt: $M = (-4; 0)$.

ACHTUNG: $M = [-4; 0]$ ist falsch! Denn $x^2 + 4x$ muss KLEINER als Null sein.

ACHTUNG: $M = (0; -4)$ ist falsch, weil $-4 < 0$.

ACHTUNG: $M = \{-4; 0\}$ ist falsch, denn dieses M hat nur zwei Elemente -4 und 0. Bitte immer gut beachten, welche Klammern zu benutzen sind!

(4). Finde zwei Mengen A und B ($A \neq B$), sodass

(i) $A \cap B = [0;1]$,

(ii) $A \cup B = \{q \in \mathbb{Q} | q^2 > 4\}$,

(iii) $A \setminus B = \{8, 9\}$.

(i) Da $[0;1]$ ein INTERVALL ist, wird jede Konstruktion mit Mengen wie $\{0,1,2,3\}$, die nur ENDLICH viele Punkten darstellen, schief gehen. Ein Paar Möglichkeiten sind $A = (-\infty; 1]$, $B = [0;\infty)$, oder $A = [-1;1]$, $B = [0;2]$ oder irgend so etwas.

⚠

ACHTUNG $A = \{\mathbb{R}\}$ ist niemals in so einem Fall zu verwenden. Denn dieses A hat nur ein Element, und dieses Element ist eine eigenständige Menge. So hat auch die Menge $A = \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \{3\}\}$ nur drei Elemente.

ACHTUNG: Intervalle sind immer Teilmengen von $\mathbb{R}$. Also $[0;1] = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$. Mengen vom Typ $\{1,2,3\}$ sind immer endliche Mengen. Mengen vom Typ $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ sind zwar unendlich, bilden aber auf keinste Weise ein Intervall – es sei denn, man macht es nicht zu exotisch!

(ii) $q^2 > 4$ ist erfüllt, wenn entweder $q > 2$ oder $q < -2$. Damit liegt es auf der Hand als Lösung $A = \{q \in \mathbb{Q} | q > 2\}$ und $B = \{q \in \mathbb{Q} | q < -2\}$ zu nehmen.

⚠

ACHTUNG: Die Notation $\{x \in \mathbb{Q} | F(x) = 0\}$ oder auch $\{x \in \mathbb{Q} | F(x) > 0\}$ mit $F(x)$ irgendein Ausdruck ist vom Typ „Alle x aus der Menge BLABLA, die Bedingung BABA erfüllen“.

(iii) Elegante Lösung $A = [8;9]$ und $B = (8;9)$. Auch ok sind Lösungen vom Typ $A = \{8, 9, 10, 11\}$ und $B = \{10, 11, 12, 13\}$.

⚠

ACHTUNG: Mengen vom Typ $\{\mathbb{N}\}$ sind wieder nicht zulässig hier.

(5). Gegeben ist das Parallelogramm $ABCD$ mit $A = (0|0)$, $B = (3|2)$, $C = (4|5)$ und $D = (1|3)$.

(i) Begründe, dass dies ein Parallelogramm ist.

(ii) Gib die Parameterdarstellungen von den Diagonalen AC und BD.

(iii) Zeige, dass der Schnittpunkt die Diagonalen halbiert.

(i) $\overrightarrow{AB} = (3|2)$ und $\overrightarrow{DC} = C - D = (4-1|5-3) = (3|2)$ einerseits; $\overrightarrow{AD} = (1|3)$ und $\overrightarrow{BC} = C - B = (1|3)$ andererseits. Somit sind gegenüberliegende Seiten parallel. Das ist die Definition eines Parallelogramms.

ACHTUNG: Es reicht nicht zu sagen, dass gegenüberliegende Seiten parallel sind. Das musst du zeigen! Ohne Berechnung keine Punkte bei solchen Aufgaben.

ACHTUNG: Mit dem Skalarprodukt kannst du hier nichts anfangen. Wenn die Diagonalen normal aufeinander stehen, hast du nur gezeigt dass die Diagonalen normal aufeinander stehen. In einem Parallelogramm passiert das genau dann, wenn es eine Raute ist.

(ii) $AC: \quad (x|y) = A + t \cdot \overrightarrow{AC} = t \cdot (4|5)$. Und $BD: \quad (x|y) = B + t \cdot \overrightarrow{BD} = (3|2) + t \cdot (-2|1)$.

ACHTUNG: Den Vektor $(0|0)$ ist der NULLVEKTOR und den musst die nicht aufschreiben. Also, wenn du als Fußpunkt P einer Geraden auch $P = (0|0)$ wählen kannst, dann hat deine Parameterdarstellung diesen Vektor einfach nicht, wie bei AC der Fall ist.

(iii) Schnittpunkt wenn $3 - 2t = 4t$ und $2 + t = 5t$ also bei $t = \frac{1}{2}$. Der Schnittpunkt ist somit $S = (2|2\frac{1}{2})$. Nun ist dies tatsächlich der Mittelpunkt der beiden Diagonalen, denn

$$\frac{A+C}{2} = (2|2\frac{1}{2}) = S \qquad \frac{B+D}{2} = (2|2\frac{1}{2}) = S$$

wie du einfach kontrollierst. Du musst also die Ausdrücke für die Mittelpunkte anwenden können.

ACHTUNG: Einfach sagen, „sie schneiden bei $t = \frac{1}{2}$“ reicht nicht. Denn warum wird $t = \frac{1}{2}$ immer die Hälfte sein? Ich kann auch eine andere Parameterdarstellung nehmen, und dann ist $t = \frac{1}{2}$ ganz irgendwo anders. In der obigen Parameterdarstellung stimmt es. Aber das sollte man dann erklären können.

ACHTUNG: Was natürlich auch geht, ist die Längen von AS, SC ausrechnen, und dann sollten beide gleich lang sind. Ebenso, sollten BS und SD gleich lang sein. Dies dauert etwas länger.

ACHTUNG: Was auch geht: $S = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ und $S = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Und der erste Ausdruck bedeutet genau, von A aus halbwegs in Richtung von C, der zweite Ausdruck bedeutet genau, von B aus halbwegs in Richtung von D; somit ist S einerseits der Mittelpunkt von AC und andererseits der Mittelpunkt von BD. Somit halbieren sich die Diagonalen.

(6). Bestimme den Parameter a so, dass

(i) die quadratische Gleichung $x^2 - ax = 2x + a$ genau eine Lösung hat,

(ii) die quadratische Gleichung $x^2 - ax - a^2 - 10 = 0$ als Lösung $x = 3$ hat.

Bei dieser Aufgabe müssen Parameter bestimmt werden. Das ist eine eigene Strategie!

(i) Umschreiben: $x^2 - ax - 2x - a = 0$. Koeffizienten ablesen geht dann so: $1 \cdot x^2 + (-2-a) \cdot x + (-a) = 0$. Die Diskriminante ist also $D = (a+2)^2 + 4a = a^2 + 8a + 4$. Da NUR EINE Lösung existieren soll, muss $D = 0$ gelten. Somit $a^2 + 8a + 4 = 0$ und dann findest du

$$a = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 4}}{2} = -4 \pm \frac{1}{2}\sqrt{48} = -4 \pm \sqrt{12}\,.$$

Also, zwei Möglichkeiten. Eine hätte gereicht.

ACHTUNG: Die Diskriminante enthält NIEMALS die Variable (hier x) selbst!

ACHTUNG: Damit du die Koeffizienten a, b und c von $ax^2 + bx + c = 0$ ablesen kannst, musst du zuerst die Gleichung in diese Form bringen. Bei der Form $x^2 - ax = 2x + a$ wird das nicht gehen, dann was nimmst du dann: $b = -a$ oder $b = 2$? Zuerst alles auf eine Seite bringen, dann vor dem x^2 ablesen, dann vor dem x und dann die restlichen ZAHLEN (du eventuell Parameter enthalten können, aber niemals die Variable).

(ii)

Und dann bekommt man:

$9 - 3a - a^2 - 10 = 0$ also $-a^2 - 3a - 1 = 0$ also, besser ausgedrückt: $a^2 + 3a + 1 = 0$. Dann findest du

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

ACHTUNG: Wenn eine Lösung gegeben ist: LÖSUNG EINSETZEN!!

ACHTUNG: Viele arbeiten mit der kleinen Lösungsformel. Ich halte das doch nicht für eine gute Idee. Damit werden zu viele Fehler gemacht. Warum verstehe ich nicht, aber ich nehme dies halt wahr.