AG-Grundkompetenzen

Aufgabe 1.

Schreibe mithilfe von Intervall(en): $\{x \in \mathbb{R} | x^2 + 4x > 2\}$.

Antwort(en): Umformen $x^2 + 4x - 2 > 0$. Zuerst suche ich mir die Stellen auf, wo Gleichheit herrscht, also $x^2 + 4x - 2 = 0$. Ich finde $x_1 = -2 - \sqrt{6}$ und $x_2 = -2 + \sqrt{6}$. Um zu bestimmen, wo $x^2 + 4x - 2 > 0$ stelle ich mir die Parabel dazu vor, sie ist nach oben gekrümmt, also im Intervall $(x_1; x_2)$ ist die Parabel unter der x-Achse. Die Lösung ist somit:

$$\{x \in \mathbb{R} | x^2 + 4x > 2\} = (-\infty; -2 - \sqrt{6}) \cup (-2 + \sqrt{6}; \infty)$$

Aufgabe 2.

Gegeben ist die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2 + 7tx + 1 - t^2$, mit $t \in \mathbb{R}$. Bestimme den Wert / die Werte von t, sodass die Parabel genau eine Nullstelle hat.

Diskriminante von $D = \frac{1}{2}x^2 + 7tx + 1 - t^2 = 0$ ist $(7t)^2 - 2(1 - t^2) = 51t^2 - 2$. Dies ist Null, wenn $t = \pm\sqrt{\frac{2}{51}}$. Bitte nicht vergessen, dass es hier zwei Wurzeln von $D = 0$ gibt!

Aufgabe 3.

In einem Hotel kostet eine Übernachtung P Euro für Erwachsene und Q Euro für Kinder. Schreibe einen Termausdruck auf, für den zu bezahlenden Preis für einen Aufenthalt von X Tagen für A Kinder und B Erwachsene in diesem Hotel.

Lösung $X(AQ + BP)$.

Aufgabe 4.

Es sei $P = (2|1)$. Bestimme eine Parameterdarstellung einer Geraden g, die durch P geht und Steigung 4 hat.

Wenn eine Gerade Richtungsvektor $(a|b)$ hat, dann ist die Steigung b/a. Daher ist eine mögliche Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Alternative Lösungsidee: Wenn $P = (2|1)$ auf der Geraden liegt, und diese Gerade Steigung 4 haben soll, dann liegt auch $Q = (3|5)$ auf der Geraden. Dann ist $Q - P$ ein Richtungsvektor.

Aufgabe 5.

Gegeben ist die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$ und sei g die Gerade $3x + ty = -4$. Finde die Werte von t, sodass die Gerade eine Tangente an der Parabel ist.

Ich habe die Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2$ in die Geradengleichung eingesetzt. Dann bekomme ich $3x + \frac{t}{2}x^2 + 4 = 0$. Somit ist das eine quadratische Gleichung mit $a = \frac{t}{2}$, $b = 3$ und $c = 4$. Daher ist die Diskriminante $D = 9 - 8t$. Dies ist Null, wenn $t = \frac{9}{8}$.

Aber ACHTUNG, wenn $a = \frac{t}{2}$ Null ist, ist es keine quadratische Gleichung!!! Dann müssen wir den Fall separat behandeln: wenn $t = 0$, dann $3x = -4$. Das ist eine vertikale Gerade, also keine Tangente.

Nochmal ACHTUNG: man sieht leicht, dass $(-\frac{4}{3}|0)$ auf allen Geraden g liegt. Somit sollte es ja zwei Möglichkeiten geben, eine Tangente an der Parabel zu bekommen (mache mal eine Skizze). Das stimmt auch, aber die Steigung sollte dann Null sein, und dies geht nicht wirklich, denn die Steigung der Geraden ist $-\frac{3}{t}$, also nur wenn $t \to \pm\infty$ finden wir die zweite Option. Sollte also ein Grund sein, Unendlich doch als Zahl zu sehen, oder? Ganz einfach geht das aber nicht ...

Aufgabe 6.

Betrachte die Gerade h, gegeben durch

$$h: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Gib eine Gleichung (also, Normalvektorform) jener Geraden an, die parallel zu h ist und durch den Punkt $(-2|1)$ geht.

Der Vektor $(5|2)$ steht normal auf h und sollte somit auch normal auf der gesuchten Geraden stehen. Daher ist die gesuchte Gleichung von der Form $5x + 2y = C$ und C finden wir indem wir $(-2|1)$ einsetzen. Somit $5x + 2y = -8$.

Aufgabe 7.

Von einem Parallelogramm $ABCD$ sind bekannt: $A = (0|0)$, $B = (4|-2)$ und der Schnittpunkt der Diagonalen $S = (3|3)$. Bestimmen Sie die anderen Eckpunkte!

Da A der Ursprung ist, finden wir direkt $C = 2S = (6|6)$. Und dann $D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} = C - B = (2|8)$.

Aufgabe 8.

Betrachten Sie die drei Punkte $A = (-1|-2)$, $B = (5|0)$ und $C = (1|z)$. Bestimme den Wert / die Werte von z, sodass das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig ist, und der rechte Winkel bei Eckpunkt C liegt.

Null sollte das Skalarprodukt $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ sein. Das liefert uns $z^2 + 2z - 8 = 0$. Lösungen davon sind $z = -4$ und $z = 2$.

Aufgabe 9. Betrachte die Menge $M = \{r \in \mathbb{Q} | 2 < r \leq 5\}$. Welche Aussagen sind richtig?

(i) $M = (2; 5) \cap \mathbb{Q}$,	(ii) M hat ein größtes Element.
(iii) $M \subset \{2, 3, 4, 5\}$,	(iv) $M \subset \mathbb{C}$
(v) $M \cap \mathbb{N}$ ist endlich,	(vi) $\{2, 3, 4, 5\} \subset M$

Richtig sind (ii), (iv) und (v). Aussage (i) ist falsch, weil 5 in $(2; 5) \cap \mathbb{Q}$ nicht dabei ist. Aussage (iii) ist falsch, weill M nicht nur die Elemente 2, 3, 4 und 5 enthält. Aussage (vi) ist falsch, weil $2 \notin M$.

Aufgabe 10.

Finde so weit wie möglich gekürzte Bruchzahlen a, b und c, sodass

$$\sqrt[4]{\frac{A^3 B^9}{C^{12} B^{-12}}} = A^a B^b C^c$$

Bitte bei solchen Aufgaben auch immer aufschreiben $a = \ldots$, $b = \ldots$ und so weiter. Hier ist die korrekte Art die Lösungen wiederzugeben:

$a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$, $c = -3$.

Aufgabe 11.

Bestimme den Wert von p, sodass die quadratische Gleichung $x^2+px+10 = 0$ die Lösungsmenge $\{-3, -3\frac{1}{3}\}$ hat.

Hier kann man einfach die beiden Lösungen addieren und ein Minus davorgeben. Oder wir setzen eine Lösung ein, zB $x = -3$ und bekommen dann $9 - 3p + 10 = 0$, also $p = 6\frac{1}{3}$. Auch tolle Methode ist die Linearfaktorzerlegung $(x + 3)(x + 3\frac{1}{3}) = x^2 + 6\frac{1}{3}x + 10$.

Aufgabe 12.

Betrachte das Dreieck $\triangle ABC$ und das Dreieck ABD, wobei $A = (0|0)$, $B = (4|0)$, $C = (4|6)$ und $D = (4|7)$. Skizziere die Situation und bestimme den Winkel $\angle CAD$.

Skizze: Mache ich an der Tafel. Hier ist wichtig einzusehen, dass es rechtwinklige Dreiecke gibt.

Ersichtlich ist dann, dass der gesuchte Winkel wie folgt berechnet werden kann:

$$\arctan(\frac{7}{4}) - \arctan(\frac{6}{4}) \approx 3,95(Grad)$$

Aufgabe 13.

Gib eine Parameterdarstellung einer Geraden g an, die durch $P = (3|2)$ geht und die x-Achse unter einem Winkel von 60 Grad schneidet.

Die Steigung ist also $\tan(60^o)$ also $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Daher

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14.

Für welche Werte von t hat die quadratische Gleichung $x^2 + tx = 3x + 9$ keine Lösungen? Schreibe die Lösung mithilfe von Intervallen an!

Für keine! Die Diskriminante von $x^2+(t-3)x-9 = 0$ ist immer positiv! Daher $t \notin \mathbb{R}$, oder $t \in \emptyset$. Achtung $\emptyset$ gilt auch als Intervall, es ist zwar nichts drinnen, aber wir können auch schreiben $(1; 1] = \emptyset$.