AG-Aufgaben

Strategien, Hinweise und Methoden

Es ist praktisch unmöglich alle Typen von Aufgaben zu behandeln. Eine kleine Auslese wird aber wohl hilfreich sein. Ein Paar Aufgaben zum Ausprobieren sind im Text eingebaut.

PARAMETERAUFGABEN

(1) Bei diesen Aufgaben muss man strikt trennen zwischen Variablen und Parametern. Identifiziere diese also zuerst!

(2) Meistens muss man einen Parameter so bestimmen, dass eine Eigenschaft auftritt. Schreibe diese Eigenschaft und die Bedingung dazu für dich klar auf!

(3) Die Bedingung gibt dir eine Gleichung, in welcher der Parameter eine Rolle spielt.

Beispiel: Gegeben sind die Geraden

$$g: \quad 3x - 4y = 5\,, \qquad h: \quad tx + 2y = 1\,,$$

wobei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Dann kann man t so bestimmen, dass (i) die Geraden parallel sind, (ii) die Geraden normal auf einander stehen. **Finde diese Werte[1] von t!**

Beispiel: Gegeben ist die Parabel $y = x^2 - tx + 2$ mit $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Eigentlich sind das also viele Parabeln; für jeden t ist es eine Parabel. Bestimme jetzt den Wert / die Werte von t, sodass (i) die Parabel genau eine Nullstelle hat, (ii) eine Nullstelle bei $x = 5$ liegt, (iii) der Scheitel bei $x = -3$ liegt.

Um das vorige Beispiel zu lösen: (i) eine Nullstelle bedeutet $y = 0$, also $x^2 - tx + 2 = 0$; genau eine Nullstelle bedeuet das die Diskriminante hier verschwindet also $t^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 0$, also $t^2 - 8 = 0$, daher $t = \pm\sqrt{8}$, (ii) in so einem Fall, $x = 5$ einsetzen! Also $25 - 5t + 2$ muss Null sein, also $t = \frac{27}{5}$; (iii) Bei einer Parabel von der Form $y = ax^2 + bx + c$ liegt der Scheitelpunkt bei $x = -\frac{b}{2a}$, hier ist $b = -t$ und $2a = 2$, also liegt der Scheitelpunkt bei $x = t/2$, somit muss also $t = -6$ sein.

Beispiel: Jetzt bist du dran! Betrachte die Parabel $y = 3x^2 - 2tx - t^2$ mit $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Bestimme jetzt den Wert / die Werte von t, sodass (i) die Parabel genau eine Nullstelle hat, (ii) eine Nullstelle bei $x = 5$ liegt, (iii) der Scheitel bei $x = -3$ liegt.

(4) Essentiel ist also das richtige Ablesen der Parameter, oder der Koeffizienten.

Ein Beispiel: Es seien die Werte von t zu bestimmen, sodass die Gleichung $x^2 + tx = 4x - 3t$ genau eine Lösung hat. Dies ist eine klassische Anwendung des Diskriminantenmerkmals. Zuerst müssen wir aber die Gleichung auf die Form $ax^2 + bx + c = 0$ bringen. Das erfordert Arbeit! Wir finden aber bald $x^2 + tx - 4x + 3t = 0$, aber was ist jetzt a, b oder c? Was steht vor x^2? Das ist einfach, eine 1. Also, $a = 1$. Danach sehen wir, dass wir $tx - 4x$ haben. Das schreiben wir als $(t - 4)x$. Somit ist $b = 4 - t$. Dieser Schritt ist wesentlich! Für c finden wir dann also $c = 3t$. Die Diskriminante ist $D = b^2 - 4ac = (t - 4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4t = t^2 - 8t + 16 - 16t = t^2 - 24t + 16$. Damit diese Diskriminante verschwindet, muss also gelten $t^2 - 24t + 16 = 0$, und wir haben erneut eine quadratische Gleichung! Jetzt keine Angst haben und einfach weiter machen! Die Lösungen von $t^2 - 24t + 16 = 0$ sind

$$t = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2} = 12 \pm \sqrt{128}\,.$$

(5) Wichtig ist es, zu bemerken, dass die Parameter a, b und c in $ax^2 + bx + c = 0$ keine Variable (hier x) enthalten! Die Diskriminante erhält also niemals die Variable (oft x) selbst! Wenn dies aber auftritt, weißt du, dass du einen Fehler gemacht hast. Neustart!

[1] Antwort: (i) $t = -1,5$, und (ii) $t = 8/3$.

(6) Tangenten an Parablen: Eine Gerade schneidet eine Parabel einmal, zweimal oder gar nicht. Schneidet sie die Parabel einmal, so ist sie eine Tangente.

Beispiel. Gegeben ist die Familie von Geraden g_s mit Parameterdarstellung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ s \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Für welchen Wert von s ergibt sich eine Tangente an der Parabel $y = \frac{1}{4}x^2$? Hier muss man beachten, dass t der laufende Parameter der Geraden ist, und mit s ändern wir den Richtungsvektor. Ein Hinweis zur Lösung: wir lesen mal ab, und finden $x = 2 + 4t$ und $y = -1 + st$. Das setzen wir ein in $y = \frac{1}{4}x^2$ und bekommen

$$\frac{4 + 16t + 16t^2}{4} = -1 + st \Longrightarrow 16t^2 + 16t - 4st + 20 = 0\,.$$

Der Parameter t bestimmt die Punkte auf der Geraden g_s. Somit hat diese Gleichung zwei Lösungen für t, wenn die Diskriminante > 0 ist, genau eine Lösung wenn die Diskriminante Null ist, und keine Lösung für t, wenn die Diskriminante < 0 ist. Wir brauchen also den Wert von s, sodass diese Diskriminante Null ist. Aber, was ist die Diskriminante? Zuerst die quadratische Gleichung in die Form $ax^2 + bx + c$ bringen, nur jetzt spielt t die Rolle von x:

$$16 \cdot t^2 + (16 - 4s) \cdot t + 20 = 0\,.$$

Ab hier solltest du es weiter machen können! (Ich fand $s = 4 \pm 4\sqrt{5}$.) Aufgabe: Mache eine Skizze und erkläre, warum es zwei Werte von s geben muss!

TERMAUFGABEN

(1) Schreibe die wichtigen Variablen auf.

(2) Kontrolliere am Ende mit einem Zahlenbeispiel.

Beispiel: Harry ist ein Landarbeiter am Land in Kenia. Pro Stunde verdient er x Euro. Jeden Tag arbeitet er a Stunden. Um zum Arbeitsplatz zu kommen muss er mit dem Bus fahren; die Strecke kostet b Euro. Wie viel Euro verdient Harry pro Tag? Diese Aufgabe ist noch etwas uneindeutig, aber hier geht es um das Prinzip: Sein Gehalt ist also jeden Tag ax, aber man muss die Kosten für hin- und zurückfahren wieder abziehen, daher verdient er effektiv $ax - 2b$ pro Tag. Nehmen wir an, er verdient 10 Euro pro Stunde, arbeitet 8 Stunden pro Tag und die Busfahrt kostet 4 Euro. Dann verdient er effektiv also $10 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = 72$ Euro. Achte auf die Ähnlichkeit zwischen Berechnen und dem Term!

Beispiel: Siehe Matura 2016, Aufgabe 3, klicke auf oder kopiere den Link.

`https://www.bifie.at/system/files/dl/KL16_PT1_AHS_MAT_T1_CC_AU.pdf`

Lösung: $\frac{xay}{100}$.

MENGENAUFGABEN

(1) Lerne die Notation zu Mengen ganz gut! Hier unten zuerst mal einige Aussagen, die du ganz gut verstehen solltest; du solltest davon überzeugt sein, dass sie wahr sind, und auch erklärne können, warum sie wahr sind.

(2) Die Menge $\{1, 2, 3, 4, 10\}$ entält 5 Elemente.

(3) Die Menge $[1; 4]$ ist ein Intervall, enthält unendlich viele Zahlen, hat eine kleinste Zahl und eine größte Zahl.

(4) $[0; 1] \setminus (0; 1) = \{0, 1\}$.

(5) $\{\mathbb{N}, \mathbb{R}\}$ ist eine Menge mit zwei Elementen. Jedes Element ist eine Menge. Eine Tasche mit verschiedenen Taschen drinnen ...

(5) $R \setminus \mathbb{Q}$ enthält unendlich viele Elemente; die irrationalen Zahlen.

(6) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$

(7) $\{x \in \mathbb{R} | x^2 - 19x + 90 < 0\} = (9; 10)$

(8) $\{x \in \mathbb{R} | x^2 - 19x + 90 = 0\} = \{9; 10\}$ Achte auf den Unterschied mit dem vorigen Punkt! $(9; 10)$ ist ein Intervall, $\{9; 10\}$ ist eine Punktmenge sozusagen, mit nur zwei Punkten.

(9) Achte auf die Rolle der Klammern! In der Mengenlehre ist der Unterschied zwischen $(a; b)$, $[a; b)$, $\{a, b\}$ und so weiter extrem wichtig. Wenn du damit einen Fehler machst, verlierst du gleich einen Grundkompetenzpunkt. Das ist schade, denn diese Mengensprache kann man einfach auswendig lernen.

GEOMETRIE PUR

(1) Mittelpunkt von einer Strecke AB findet man mit $\frac{A+B}{2}$.

(2) Die Streckensymmetrale von AB geht durch $\frac{A+B}{2}$ und der Richtungsvektor steht normal auf $\overrightarrow{AB}$.

Beispiel: Gegeben ist $A = (3|1)$ und $B = (7|9)$. Finde die Normalvektorform für die Streckensymmetrale von AB. Hinweis: Mittelpunkt ist $(5|5)$. Richtungsvektor ist $(4|8)$ also $(8|-4)$ ist ein Normalvektor, wir dürfen also auch $(2|-1)$ nehmen. Somit finden wir $2x - y = 5$, denn $2 \cdot 5 - 5 = 5$.

(3) Bei Dreiecken, Sinus und Cosinus und Tangens: (a) Wo sind die rechten Winkel? (b) Identifiziere die wichtigen Winkel und drücke $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ oder eventuell auch $\tan \alpha$ in die angegebenen Variablen aus. (c) Welche Identitäten brauchst du? Schau ob diese aus den bei (b) gefundenen Identitäten folgen! Benutze sie dann richtig!

Beispiel: Aufgabe 6, Teil 1 Matura 2016.

(4) In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten parallel. Die Diagonalen halbieren einander, schneiden sich aber nicht unbedingt normal. Wenn sie sich normal schneiden, sind die Seiten gleich lang, und haben wir eine Raute.

(5) Eine Raute ist ein Rhombus und das ist ein Parallelogramm mit gleich langen Seiten. Dann schneiden sich die Diagonalen normal.

Beispiel: Gegeben ist $A = (2|5)$, $B = (7|5)$ und $C = (4|1)$. Finde den Punkt D so, dass $ABCD$ eine Raute ist! Hinweis: Die Seiten müssen parallel sein. Die Längen stimmen schon, da $|AB| = 5$ und $|BC| = \sqrt{(7-4)^2 + (1-5)^2} = 5$.

(6) Ein Deltoid ist ein Viereck, dessen Diagonalen sich normal schneiden und (mindestens) eine Diagonale ist durch die andere halbiert.

(7) Sinnvolle Identitäten: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, $A = B + \overrightarrow{BA}$.

(8) Der Vektor $(0|0)$ wird meistens weggelassen; genau so wie bei Zahlen, lässt man 0 oft weg, also $4x + 0 = 4x$. Man nennt $(0|0)$ den Nullvektor und schreibt sogar oft 0, als wäre es eine Zahl, auch sieht man wohl $\overrightarrow{0}$.

Beispiel: Jede Gerade von der Form $(x|y) = t \cdot (a|b)$ geht durch den Ursprung. Man schreibt den Vektor $(0|0)$ nicht auch noch auf. Aufgabe für dich: Drücke die Steigung so einer Geraden in a und b aus! Was bedeutet es geometrisch, wenn $a = 0$?

INTERPRETATIONSAUFGABEN

(1) Dies ist vielleicht die lästigste Kategorie! Es gibt keinen Königsweg. Es hilft aber, ein Zahlenbeispiel zu nehmen, und dann zu sehen, was alles bedeutet.

Beispiel: Die Preise des Mittagsmenüs in einem Restaurant werden in einer Woche mit dem Vektor $\overrightarrow{P} = (p_1|p_2|\ldots|p_7)$ angeschrieben. Die Anzahl der verkauften Mittagsmenüs werden mit dem Vektor $\overrightarrow{A} = (a_1|a_2|\ldots|a_7)$ angeschrieben. Was bedeutet das Skalarprodukt $\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{A}$? Antwort: Der Ertrag einer Woche, den die verkauften Mittagsmenüs auflieferten.

(2) Ein Hinweis findet man eventuell in den Einheiten der Größen.

Beispiel: Eine Lampe in einer Firma brennt tagsüber 16 Stunden lang mit einer Leistung von a Watt, in der Nacht aber 8 Stunden lang mit einer Leistung von b Watt. Interpretiere den Ausdruck $3600 \cdot (16a + 8b)$. Hinweis: Die 16 werden wohl die 16 Stunden sein, also eine Zeit, und die 8 die 8 Stunden, also auch eine Zeit. a und b sind Leistungen, werden also in Watt ausgedrückt, aber ein Watt ist ein Joule pro Sekunde. In einer Stunde sind aber 3600 Sekunden. Somit ist $16 \cdot 3600$ die Anzahl der Sekunden, die die Lampe mit einer Leistung von a Watt brennt. Somit hat der Teil $3600 \cdot 16a$ die Einheit von Zeit $\times$ Energie pro Zeit, ist also von Energie. Somit ist es die Energie, die diese Lampe an einem Tag verbraucht.

(3) Allgemeiner Hinweis: Fertige, wenn du mal Zeit hast, eine Liste mit wichtigen physikalischen Einheiten an, und lasse sie von mir kontrollieren! Zu beachten sind: Watt, Pascal, Newton, Meter, Sekunden, und so weiter.