Erste Schularbeit Mathematik Klasse 7A G am 12.11.2015

Korrekturversion

Aufgabe 1. (2P) **Zahlenmengen**.

Es folgen Aussage über Zahlenmengen. Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

☐	$2 \cdot 10^{-3}$ ist eine ganze Zahl.
☒	$i \cdot (i+1)$ liegt in $\mathbb{C}$ und nicht in $\mathbb{R}$.
☒	$\sqrt{5}$ liegt nicht in $\mathbb{Q}$.
☐	Das Quadrat einer complexen Zahl liegt in $\mathbb{R}$.
☐	$1,21 \cdot 10^2$ liegt in $\mathbb{Q}$ und nicht in $\mathbb{N}$.

Aufgabe 2. (2P) **Komplexe Zahlen 1**.

Der Betrag einer komplexen Zahl z sei 13. Das Argument von z sei $\frac{5\pi}{6}$ (in Bogenmaß). Bestimmen Sie den Realteil von z.

Realteil von z: $13 \cdot \cos(\frac{5\pi}{6}) = -13 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx -11,26$

Aufgabe 3. (2P) **Komplexe Zahlen 2**.

Eine reelle quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat als Lösung eine komplexe Zahl $2+3i$. Bestimmen Sie die andere komplexe Lösung und finden Sie p und q - m.a.W. finden Sie einen Termausdruck für die quadratische Gleichung.

andere komplexe Lösung: $2-3i$, daher ist der Termausdruck $(x-2-3i)(x-2+3i) = (x-2)^2 + 9 = x^2 - 4x + 13$

$p = -4 \qquad q = 13$

Aufgabe 4. (2P) **Komplexe Zahlen 3**.

Gegeben ist die komplexe Zahl $z = 5 + 12i$. Bestimmen Sie den **Realteil** und den **Imaginärteil** der **komplex Konjugierten** zu z und den **Betrag** von z!

Realteil von $\overline{z}$: 5 **Imaginärteil von** $\overline{z}$: -12 **Betrag von** z: 13

Aufgabe 5. (2P) **Äquivalente Terme**.

Gegeben sind vier Terme. Ordnen Sie jedem Term in der linken Tabelle den passenden äquivalenten Term aus der rechten Tabelle zu!

Linke Tabelle	
$(x+y)(x-y)$	**F**
$(x-y)^2$	**B**
$(x+y)(x+y)^{-1}$	**A**
$x \cdot (x+y)^{-1}$	**D**

Rechte Tabelle	
A	1
B	$x^2 - 2xy + y^2$
C	$x^2 - 2xy - y^2$
D	$\frac{x}{x+y}$
E	$\frac{x}{x-y}$
F	$x^2 - y^2$

Aufgabe 6. (2P) **Quadratische Gleichungen**.

Gegeben ist die quadratische Gleichung $3x^2 + 8x + u = 0$, wobei $c \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie den Wert von u, für welchen die quadratische Gleichung genau eine Lösung hat.

$u = 5\frac{1}{3}$; die Diskriminante muss verschwinden, daher $D = 64 - 4 \cdot 3 \cdot u = 64 - 12u$ und $D = 0$ wenn $u = \frac{64}{12} = 5\frac{1}{3}$.

Aufgabe 7. (2P) **Funktionen und Tabellen**.

Betrachten Sie die folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5
$h(t)$	3	8	13	18	23

Kreuzen Sie die richtige Formel für $h(t)$ an!

☐	$h(t) = -2 + 5^t$
☐	$h(t) = 5 \cdot 3^t$
☒	$h(t) = -2 + 5t$
☐	$h(t) = 3 + 5t$
☐	$h(t) = 3 \cdot 5^t$

Aufgabe 8. (2P) **Lineare Funktion bei** $x = 2$.

Eine lineare Funktion $f(x) = kx + d$ hat folgende Eigenschaften: $f(0) = 4$ und $f(1) = 6$. Bestimmen Sie $f(2)$!

$f(2) = 8$

Aufgabe 9. (2P) **Quotienten**.

Gegeben ist eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (M.a.W. f' existiert.) Kreuzen Sie die korrekten Aussagen an!

☐	$f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
☒	$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ist ein Differenzenquotient.
☒	$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ist ein Differentialquotient.
☐	$f(x) = \lim\limits_{z\to x} \dfrac{f'(z) - f'(x)}{z - x}$.
☒	$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Aufgabe 10. (2P) **Flächeninhalt eines Kreises**.

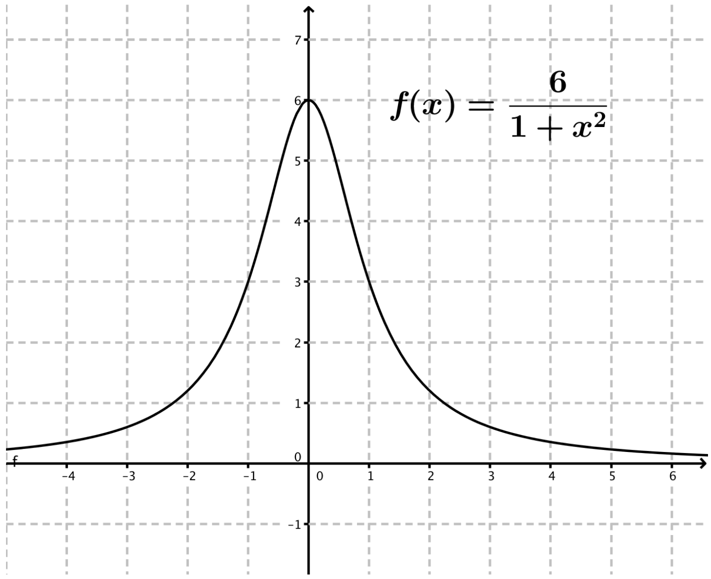
Die Funktion $f(r) = \pi r^2$ beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Radius eines Kreises und seinem Flächeninhalt.

Bestimmen Sie den Radius a, für den gilt $f'(a) = 8\pi$.

Antwort: $a = 4$, weil $f'(r) = 2\pi r$ und dies ist 8π wenn der Radius 4 ist.

Aufgabe 11. (2P) **Änderungen**.

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{6}{1+x^2}$.



Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf die Funktion f zutreffen!

☒	Die mittlere Änderungsrate von f in $[0;3]$ beträgt $-1,8$.
☐	Die momentane Änderungsrate von f an der Stelle 1 ist größer als an der Stelle -1.
☐	Die absolute Änderung von f im Interval $[-2;1]$ ist kleiner als 1.
☒	Die mittlere Änderung von f im Interval $[-1;1]$ beträgt Null.
☐	Die Steigung der Tangente an der Stelle 0 ist größer als Null.

Kommentar: $f(0) = 6$, $f(3) = 0,6$, daher ist die mittlere Änderungsrate auf $[0;3]$ $\frac{0,6-6}{3} = -1,8$. Die absolute Änderung von f im Intervall $[-2;1]$ ist $f(1) - f(-2) = 3 - \frac{6}{5} = 1,8$. Die Steigung der Tangente an der Stelle 0 ist Null.

Aufgabe 12. (2P) **Ermitteln der ersten Ableitung**.

Ordnen Sie jeder Funktion ihre Ableitung zu!

Funktionen	
$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1$	**C**
$f(x) = x^2 + 2x$	**E**
$f(x) = x + 3$	**D**
$f(x) = x^2 + x$	**A**

Ableitungen	
$f'(x) = 2x + 1$	**A**
$f'(x) = x^2 - 2x$	**B**
$f'(x) = x^2 + 2x + 1$	**C**
$f'(x) = 1$	**D**
$f'(x) = 2x + 2$	**E**
$f'(x) = \frac{x^3}{3} + 2x$	**F**

TEIL 2

Aufgabe 1. *Komplexe Zahlen*

Mit zwei komplexen Zahlen z und w kann man in der Gauß'schen Zahlenebene ein Dreieck machen! Die drei Eckpunkte sind dann der Ursprung, z und w.

Damit die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen, muss dann der Imaginärteil von $\frac{z}{w}$ nicht Null sein. Wir gehen davon aus, dass dies der Fall ist.

(a). (2 Kompensationspunkte) Betrachten Sie ein Dreieck in der Gauß'schen Ebene mit Eckpunkten 0, z und w. Kreuzen Sie an, welche Möglichkeit die Seitenlängen des Dreiecks richtig angibt!

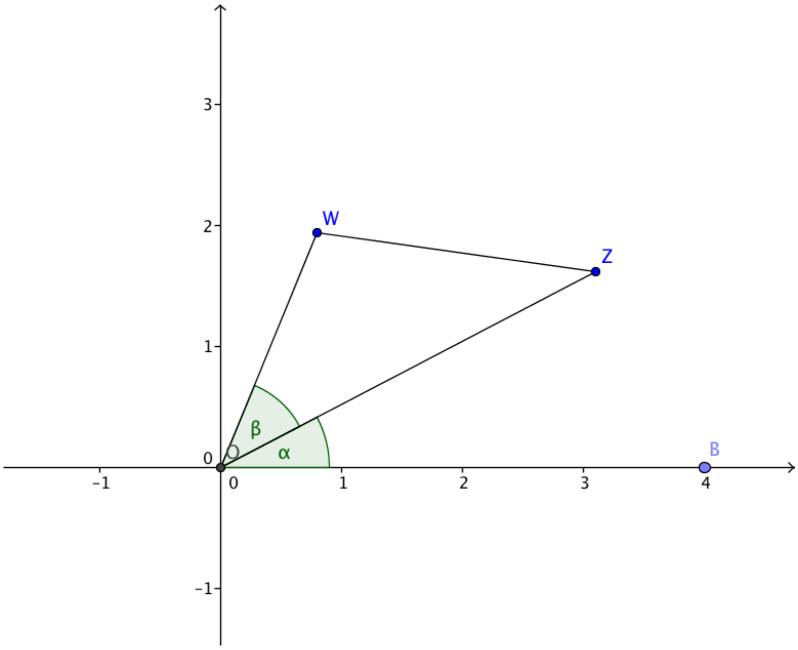
1.	Die drei Seitenlängen des Dreiecks sind z, w und $z - w$.	☐
2.	Die drei Seitenlängen des Dreiecks sind $\|z\|$, $\|w\|$ und $\|z - w\|$.	☒
3.	Die drei Seitenlängen des Dreiecks sind z, w und $z + w$.	☐
4.	Die drei Seitenlängen des Dreiecks sind $\|z\|$, $\|w\|$ und $\|z\| + \|w\|$.	☐
5.	Die drei Seitenlängen des Dreiecks sind z, w und $z \cdot w$.	☐

(b). (3 Punkte) Nehmen wir ein konkretes Beispiel: $z = 4$ und $w = 3 + 3i$. Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks mit Eckpunkten 0, z und w.

Die Seitenlänge sind mit Pythagoras zu finden: von Ursprung zu z hat Länge 4, von z zu w hat Länge $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ und von w zum Ursprung hat Länge $\sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$. Diese drei addieren ergibt etwa $11,4$.

(c). (3 Punkte) Wieder zurück zum Allgemeinen Fall. Machen Sie eine Skizze und begründen Sie anhand der Skizze, dass der Winkel φ, der beim Ursprung eingeschlossen wird, durch die Differenz zwischen $\mathrm{Arg}(z)$ und $\mathrm{Arg}(w)$ gegeben ist.

Siehe Figur



Das Argument von z ist $\angle BOZ$. Das Argument von w ist $\angle BOW$. Der gefragte Winkel ist $\angle WOZ = \angle BOW - \angle BOZ$.

Aufgabe 2. *Raketenbahnen.*

Eine Rakete wird von einer Platform A in Richtung eines Ziels B abgeschossen. A und B liegen beide auf 0 Meter Seehöhe. Die Höhe der Rakete wird durch folgende Formel beschrieben:

$$h(t) = 100t - 5t^2;$$

in dieser Formel ist t die Zeit in Sekunden nachdem die Rakete abgeschossen wurde und die Höhe $h(t)$ wird in Meter ausgedrückt. Die horizontale Distanz $d(t)$ zwischen Rakete und A wird durch die folgende Formel beschrieben:

$$d(t) = 180 \cdot t\,, \quad (d(t) \text{ wird in Meter ausgedrückt})\,.$$

(a) (2 Kompensationspunkte) Geben Sie einen Ausdruck für die erste Ableitung $h'(t)$ und bestimmen Sie eine Zeit t^*, sodass $h'(t^*) = 0$.

$h'(t) = 100 - 10t$. Also $t^* = 10$.

(b) (2 Kompensationspunkte) Interpretieren Sie die mathematische Aussage $h'(t) = 0$ korrekt! Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussagen an!

1.	Falls $h'(t) = 0$, dann hat die Rakete ihre Höchstgeschwindigkeit erreicht.	☐
2.	Falls $h'(t) = 0$, hat die Rakete ihren höchsten Punkt erreicht.	☒
3.	Wenn $h'(t) = 0$, dann hat die Rakete eine mittlere Geschwindigkeit von 0 m/s.	☐
4.	Wenn $h'(t) = 0$, dann trifft die Rakete B.	☐
5.	Falls $h'(t) = 0$, dann ist die vertikale Geschwindigkeit Null.	☒

(c) (3 Punkte) Angenommen, die Rakete trifft ihr Ziel B. Berechnen Sie, wie viele Sekunden nach Abschuss die Rakete B trifft, und wie weit A und B aus einander liegen.

Das Ziel trifft B, wenn $h(t) = 0$ und $t > 0$. Also wenn $100t - 5t^2 = 0$, daher wenn $100 - 5t = 0$, also wenn $t = 20$ Sekunden. Dann ist die Distanz zwischen A und B also $d(20) = 180 \cdot 20 = 3600$ Meter.

Aufgabe 3. *Tangenten.*

Es sei $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x$ gegeben.

(a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die zwei Punkte P und Q auf dem Graphen von f, sodass die Tangenten am Graphen von f in P und Q parallel zur Geraden $g: \quad 3x - 2y = 8$ sind.

Die Steigung der Geraden ist zu finden indem wir die Gleichung umformen: $y = \frac{3}{2}x - 8$. Somit ist die Steigung $\frac{3}{2}$. Zu lösen ist also die Gleichung $f'(x) = \frac{3}{2}$, differenzieren ergibt $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1$. Somit ist die Gleichung $\frac{3}{2}x^2 - 1 = \frac{3}{2}$ zu lösen. Also $x^2 = \frac{5}{3}$, also $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$. Ein Punkt ist also $(\sqrt{\frac{5}{3}}|\sqrt{\frac{5}{3}}(\frac{5}{6} - 1)) = (\sqrt{\frac{5}{3}}| - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{3}})$. Der andere Punkt ist dann $(-\sqrt{\frac{5}{3}}|\frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{3}})$.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Extrempunkte von f. Bei den Extrempunkten ist die erste Ableitung Null. Also $\frac{3}{2}x^2 - 1 = 0$, also $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Dies einsetzen in f und die findest die y-Werte der Extrempunkte. $(\sqrt{\frac{2}{3}}| - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}})$ und $(-\sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}})$.

Aufgabe 4. *Seilbahn*

Das Seil einer Materialseilbahn hängt etwas durch und die Höhe des durchhängenden Seils sei ungefähr durch die Funktion $f(x) = \frac{1}{80}(x - 12)^2 + 100$ (mit $0 \leq x \leq 50$) gegeben.

(3 Punkte) Ist das Seil an der Stelle 18 oder an der Stelle 6 steiler? Bestimmen Sie ihre Antwort rechnerisch und überprüfen Sie das Ergebnis anhand einer Skizze!

Es ist eine Parabel. Das Minimum findet man indem das Quadrat Null ist. Daher ist das Minimum bei $x = 12$. Durch die Symmetrie einer Parabel ist das Seil bei $x = 18$ und $x = 6$ gleich, denn beide Punkte liegen auf Distanz 6 von der Achse $x = 12$.

In Berechnung $f'(x) = \frac{1}{40}(x - 12)$, also $f'(6) = -\frac{6}{40} = -\frac{3}{20}$, und $f'(18) = +\frac{3}{20}$. Also an beiden Stellen gleich steil, denn die Steigung ist in Betrag an beiden Stellen gleich.