Aufgabe 1. (2P) **Umformungen – AG**.

Betrachten Sie den Term $\sqrt[4]{\frac{A^8 B^7}{B^3 A^5}}$.

Schreiben Sie diesen Term in die Form $A^p \cdot B^q$, wobei p und q **Bruchzahlen** sind, und lesen Sie p und q ab.

$p = \frac{3}{3}$

$q = 1$.

Aufgabe 2. (2P) **Gleichung mit Exponenten – AG/FA**.

Betrachten Sie die Gleichung $z = b^x$ für x, wobei $b \in \mathbb{R}^+$. Kreuzen Sie die zutreffenden Aussagen an!

1. ☐	Die Gleichung besitzt für alle $z \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung für x.
2. ☐	Falls $z > 0$ ist die Lösung $x = {}^z\log(b)$.
3. ☒	Falls $z > 0$ ist die Lösung $x = {}^b\log(z)$.
4. ☐	Falls $z > 0$ ist die Lösung $x = \sqrt[b]{z}$.
5. ☒	Falls $z \leq 0$ gibt es keine Lösung für x, wenn $z > 0$ genau eine Lösung.

Aufgabe 3. (2P) **Quadratische Gleichungen – AG**.

Betrachten Sie die quadratische Gleichung $x^2 + 3ax - 7a = 0$, wobei der Parameter a **nicht Null** ist.

Bestimmen Sie den Wert von a, sodass diese quadratische Gleichung genau eine Lösung hat.

$a = -\frac{28}{9} = -3\frac{1}{9}$ Diskriminante ist $9a^2 + 28a$. Diese muss Null sein, und da $a \neq 0$, dürfen wir durch a dividieren, also $9a + 28 = 0$.

Aufgabe 4. (2P) **Sinusfunktion – FA**.

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei von der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^+$.

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

1. ☐	Die Funktionswerte von f sind positiv.
2. ☒	Wenn man a verdoppelt, verdoppelt sich die Amplitude.
3. ☐	Wenn man b verdoppelt, verdoppelt sich die Amplitude.
4. ☒	Die Funktion f ist punktsymmetrisch um den Ursprung: $f(-x) = -f(x)$.
5. ☐	$f(0) = a$.

Aufgabe 5. (2P) **Parallele Geraden – AG**.

Betrachten Sie die Gerade h in der Ebene $\mathbb{R}^2$ definiert durch $h : \quad 3x - y = 7$. **Steigung ist** 3**!**

Bestimmen Sie für welchen Wert von a, die Gerade g, welche durch $(0|0)$ geht und durch die Parameterdarstellung definiert

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 9 \end{pmatrix} \cdot t \,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

ist, parallel zu h ist.

g **und** h **sind parallel, wenn** $a = 3$, denn dann ist die Steigung von g auch 3. Nicht vergessen, wenn $(a|b)$ ein Richtungsvektor ist, dann ist die Steigung $\frac{b}{a}$. Du kannst auch zwei Punkte auf der Geraden nehmen und dann die Steigung ausrechnen. Wenn $t = 0$, dann haben wir $(0|0)$ und wenn $t = 1$, dann haben wir $(a|9)$. Also $\Delta x = a$ und $\Delta y = 9$. Somit $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9}{a}$. Damit dies drei ist, muss also $a = 3$ gelten.

Aufgabe 6. (2P) **Kombinatorik – WS**.

Einem Fussballtrainier stehen 20 Fussballspieler zur Verfügung um eine Mannschafft aufzustellen. Auf wie viele Weisen ist eine Auswahl von 11 Personen aus diesen 20 Personen möglich?

Antwort: $\binom{20}{11} = 167960$.

Aufgabe 7. (2P) **Arithmetisches Mittel und empirische Standardabweichung**.

Gegeben sind der Mittelwert $\overline{x}$ und die empirische Standardabweichung s der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$.

Wie ändern sich der Mittelwert $\overline{x}$ und die empirische Standardabweichung s, wenn zu jedem Datenwert $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ die Zahl $z \in \mathbb{R}^+$ addiert wird? Kreuzen Sie die korrekte Antwort an!

1. ☐	$\overline{x}$ und s werden jeweils um z größer.
2. ☐	$\overline{x}$ bleibt gleich und s wird um z größer.
3. ☐	$\overline{x}$ wird um z größer und s wird um z^2 größer.
4. ☐	$\overline{x}$ und s bleiben gleich.
5. ☒	$\overline{x}$ wird um z größer und s bleibt gleich.
6. ☐	$\overline{x}$ wird um z größer und s wird um $\sqrt{z}$ größer.

Aufgabe 8. (2P) **Würfelspiel – WS**.

Betrachten wir folgendes Würfelspiel: Eine Person würfelt dreimal mit einem ehrlichen Spielwürfel. Diese Person hat gewonnen, wenn mindestens zweimal ein Sechser geworfen wird. Anderenfalls verliert die Person. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P auf Gewinn.

$P = \frac{2}{27} \approx 0,074$. Denn entweder 3 Sechser, oder zwei Sechser. $P(X = 2) = 3 \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{5}{6}$ und $P(X = 3) = \frac{1}{6^3}$. Zusammen also $\frac{15+1}{216} = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}$.

Aufgabe 9. (2P) **Abschätzen & Prognose – WS**.

Eine Grippewelle hat die Stadt *Manzana Grande* mit 250.000 Einwohnern im Griff. Die Wahrscheinlichkeit auf eine Infizierung beträgt 25%. Bei einer Infizierung kommt es noch nicht unbedingt zu einer Erkrankung; die Wahrscheinlichkeit auf Erkrankung falls man infiziert worden ist, liegt bei 60%. Wie viele Einwohner etwa dieser Stadt werden während der Grippewelle **nicht** krank?

Antwort: 85% von 250.000 ist 212.500. Denn 25% infiziert sich, davon werden 60% krank, also insgesamt werden 15% krank. Der Rest also nicht. Somit 212.500. Übrigens bedeutet

Manzana Grande „Großer Apfel“, also Big Apple, somit New York, welche in Wirklichkeit etwas mehr Einwohner hat.

Aufgabe 10. (2P) **Gewinnspiel – WS**.

Betrachten Sie folgendes Gewinnspiel: Aus einer Schachtel muss blind eine Kugel gezogen werden. In dieser Schachtel ist eine goldene Kugel, zwei silberne Kugeln und drei bronzene Kugeln und 14 weiße Kugeln. Zieht diese Person eine goldene Kugel, so gewinnt sie 100 Euro; zieht sie eine silberne Kugel, so gewinnt sie 25 Euro; zieht sie eine bronzene Kugel, so gewinnt sie 15 Euro; zieht sie eine weiße Kugel, so gewinnt sie nichts. Um an das Spiel teilzunehmen, muss 10 Euro gezahlt werden.

Berechnen Sie Erwartungswert $E(X)$ des Gewinns X bei diesem Spiel.

$E(X) = \frac{1}{20} \cdot 100 + \frac{2}{20} \cdot 25 + \frac{3}{20} \cdot 15 + \frac{14}{20} \cdot 0 - 10 = -\frac{1}{4} = -0,25$ Euro.

Aufgabe 11. (2P) **Varianz – WS**.

Die stochastische Variable X nehme nur die Werte 0 und 1 an, und $P(X = 1) = p$ und $P(X = 0) = 1 - p$.

Geben Sie einen Termausdruck für die Varianz von X!

$\sigma_X^2 = Var(X) = p(1 - p)$

Methode 1: Binomial mit $n = 1$ und p.

Methode 2: $E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$. $E(X^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p$. $E(X^2) - (EX)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$. Der Trick ist hier (a) benutze $Var(X) = E(X^2) - (EX)^2$ und $E(X^2)$ ist $E(X)$, weil X nur die Werte 1 und 0 annehmen kann und $1^2 = 1$ und $0^2 = 0$.

Aufgabe 12. (2P) **Lineare Funktion – FA**.

Gegeben ist die lineare Funktion $f(x) = kx + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$. Des Weiteren ist bekannt, dass $f(2) = 6$ und $f(10) = 42$.

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!

1. ☐	k ist negativ, weil $f(6) < f(10)$.
2. ☒	$f(0) = -3$.
3. ☐	f beschreibt eine direkte Proportionalität.
4. ☒	$f(6) = 24$.
5. ☒	f hat eine Nullstelle im Intervall $[0; 2]$.

$f(x) = 4\frac{1}{2} \cdot x - 3.$

Aufgabe 1. *Kugeln und Kreise*

Es sei K eine Kugel mit Radius 10 und der Mittelpunkt M liegt auf der positiven z-Achse. Der Punkt $P = (0|0|-2)$ liegt auf K.

(a) (1 Ausgleichspunkt) Geben Sie die Gleichung für die Kugel K.

M muss also $(0|0|8)$ sein. Somit $x^2 + y^2 + (z-8)^2 = 100$.

(b) (2 Punkte) Die xy-Ebene ist durch die Gleichung $z = 0$ bestimmt; jeder Punkt in der xy-Ebene hat z-Koordinate Null. Die Kugel K schneidet die xy-Ebene in einem Kreis. Bestimmen Sie eine Gleichung für diesen Kreis und bestimmen Sie seinen Radius.

$z = 0$ einsetzen. $x^2 + y^2 + (-8)^2 = 100$ also $x^2 + y^2 = 36$. Somit ist der Radius 6.

(c) (2 Punkte) Betrachten Sie die Gerade g definiert durch die Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

Bestimmen Sie die Schnittpunkte von g mit K!

Einsetzen: $(2t)^2 + t^2 + (4 + 2t - 8)^2 = 100$. Also $9t^2 - 16t - 84 = 0$. Dann also $t = 4,94$ oder $t = -2,29$ und diese t-Werte einsetzen.

(d) Es sei h eine Gerade durch P mit Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$.

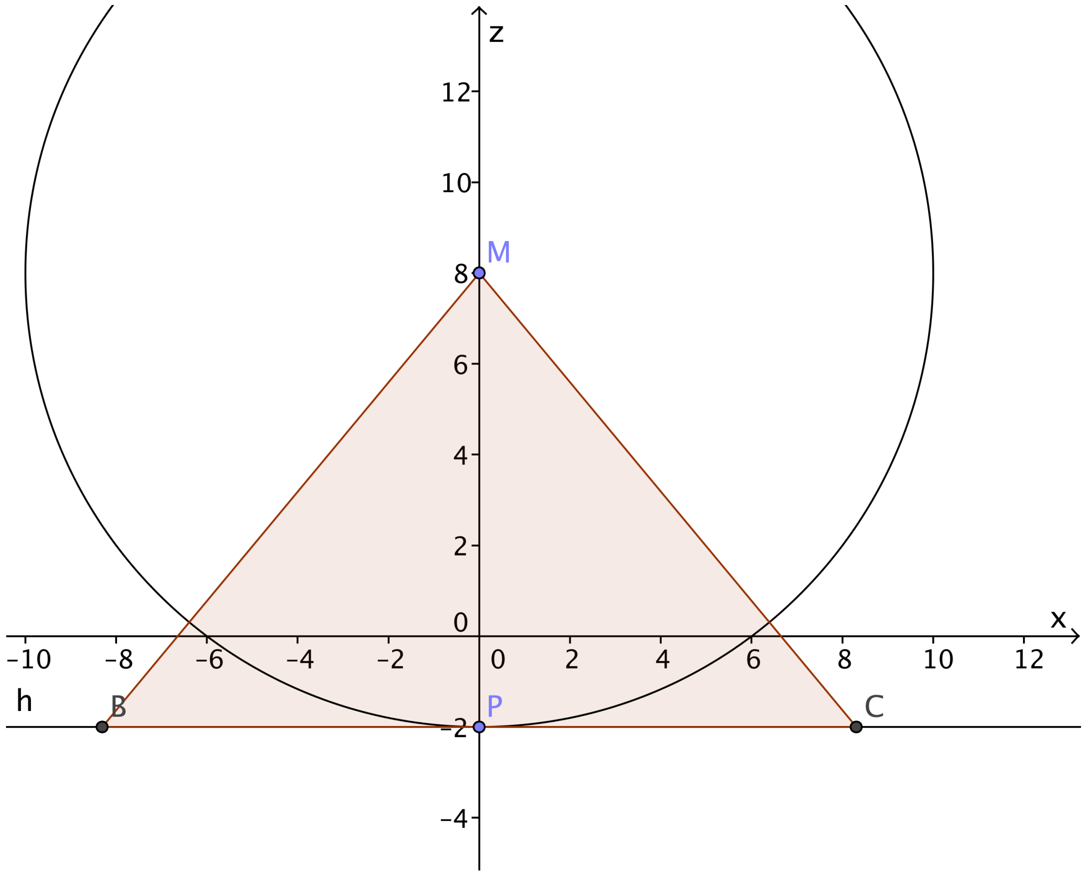
(1 Ausgleichspunkt) Geben Sie an, welche Bedingung $\overrightarrow{v}$ erfüllen muss, damit h eine Tangente an K ist.

$\overrightarrow{v}$ muss normal auf $\overrightarrow{MP}$ sein. Also $v_3 = 0$, denn M und P liegen auf der z-Achse. Die Antwort „normal auf K“ reicht nicht, denn K ist kein Vektor; außerdem haben Vektoren nicht fixe Anfangs- und Endpunkte, daher ist es nicht eindeutig in welchem Punkt gemeint ist. Man muss also bei Normal-aufeinander-stehen schon einen Vektor benutzen. Man muss hier genau sein. Bei der Matura werden doppeldeutige oder undeutige Anworten auch nicht als richtig bewertet; in der Korrekturvorlage wird eine ziemlich genaue Sprache verlangt.

(2 Punkte) Nehmen wir an, $\overrightarrow{v}$ sei so gewählt worden, dass h parallel zur x-Achse verläuft. Bestimmen Sie zwei Punkte B und C auf h, sodass $|MB| = |MC| = 13$. Bestimmen Sie

die Fläche des Dreiecks $\triangle MBC$.

Siehe Skizze. Dreieck $\triangle PMC$ ist rechtwinklig mit Hypotenuse 13 und eine Kathete 10, somit hat die andere Kathete die Länge $\sqrt{69}$. Die zwei Punkte sind also $(\pm\sqrt{69}|0|-2)$. Fläche ist dann $10 \cdot \sqrt{69}$.



Aufgabe 2. *Taxifahrer.* (Nach Beispiel aus dem Buch.)

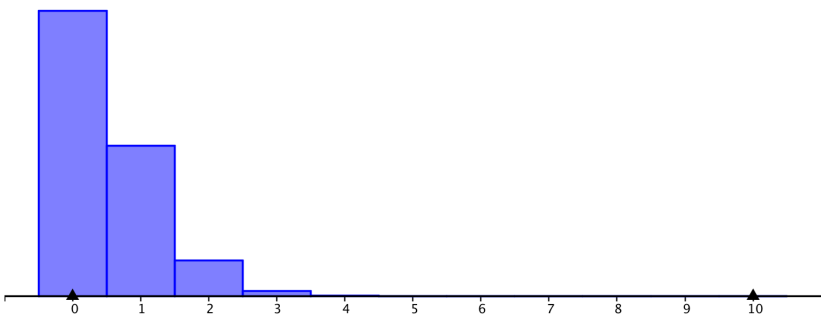
Ein Taxifahrer hat oft Probleme mit dem Wechselgeld, wenn in derselben Schicht mehrere Farhgäste jeweils mit einem 100-Euro-Schein bezahlen wollen. Er schätzt, dass etwa einer von 20 Fahrgästen mit einem solchen Schein bezahlen will.

(a) (1 Ausgleichspunkt) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den nächsten 10 Fahrgästen kein Fahrgast mit einem 100-Euro-Schein zahlen will.

$\left(\frac{19}{20}\right)^{10} \approx 0,599$

(b) (6 Punkte) Sei X die Anzahl der Fahrgäste unter den nächsten 10 Fahrgästen, die mit einem 100-Euro-Schein zahlen wollen. Geben Sie einen geeigneten Ereignisraum an, geben Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ für $0 \leq k \leq 10$ und stellen Sie diese Graphisch dar. Berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$ und interpretieren Sie $E(X)$ im Kontext!

$P(X = k) = \binom{10}{k}\frac{19^{10-k}}{20^{10}}$. Damit Tabelle machen. Du wirst sehen, dass die Zahlen sehr schnell sehr klein werden. Damit ist klar, dass man nur für $k = 0, 1, 2, 3, 4$ etwas ausrechnen muss – aber $k = 0$ hattest du schon. Davon dann ein Diagramm machen – siehe auch Diagramm hier unten. Es ist eine Binomialverteilung, daher $E(X) = np = 0,5$ und $Var(X) = np(1-p) = \frac{19}{40}$. Im Schnitt wird der Taxifahrer bei Schichten mit 10 Fahrgästen also $0,5$ Fahrgäste haben, die mit einem 100-Euro-Schein zahlen wollen. Der Mittelwert der Anzahl der Fahrgäste, die mit einem 100-Euro-Schein zahlen wollen, beträgt bei vielen Schichten mit 10 Personen $0,5$. So wird er also bei 100 Schichten mit 10 Personen insgesamt 1000 Personen gefahren haben und von ihnen wird dann etwa 50 mit einem 100-Euro-Schein zahlen wollen.



(c) (2 Punkte) Wie viele Fahrgäste muss der Taxifahrer fahren, dass die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer von ihnen mit einem 100-Euro-Schein zahlen will, mehr als 50% beträgt?

Zu lösen: $1-\left(\frac{19}{20}\right)^m \geq \frac{1}{2}$. Mit Gleichheit finden wir $\left(\frac{19}{20}\right)^m = 0,5$ also $m = 13,51$ etwa, somit muss er 14 mal Fahrgäste fahren.

Aufgabe 3. *Wechselmünze* (Nach Beispiel aus dem Buch.)

Eine Münze wird viermal geworfen. Wenn aufeinander folgende Würfe verschieden Ergebnisse zeigen, liegt ein „Wechsel“ vor. So ist bei $ZKKZ$ die Anzahl der Wechsel 2. Sei X die Anzahl der Wechsel

(a) (1 Ausgleichspunkt) Geben Sie eine geeignete Menge an, welche die möglichen Werte von X beschreibt. (Achtung, du sollst die kleinstmögliche Menge nehmen. Die Menge $\mathbb{R}$ ist zum Beispiel zu groß.)

$E = \{0, 1, 2, 3\}$.

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$.

Methode 1: Alle 16 Möglichkeiten wie $ZZZZ$, $ZZZK$ usw aufschreiben, Wechsel zählen, usw. Zwei davon haben keinen Wechsel, 6 davon haben einen, 6 davon haben zwei, und zwei davon haben 3. Usw. Somit weißt du $P(X = k)$ für $k = 0, 1, 2, 3$. Daher $E(X) = 0 \cdot \frac{2}{16} + 1 \cdot \frac{6}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{2}{16} = 1,5$.

Methode 2: Es gibt drei Stellen, wo ein Wechsel auftreten kann. Zuerst zwischen 1 und 2. Die WS auf Wechsel ist ein Halb, weil es gibt 4 Optionen ZZ, ZK, KZ und KK und zwei davon haben einen Wechsel. Aber dann ist X binomial verteilt, mit $n = 3$ und $p = 0,5$. Somit $P(X = 0) = \frac{1}{8}$, $P(X = 1) = \frac{3}{8} = P(X = 2)$ und $P(X = 3) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$. Daher dann $E(X) = 3 \cdot 0,5 = 1,5$ und $Var(X) = np(1 - p) = \frac{3}{4}$.

Aufgabe 4. *Willkürliche Geraden*

Gegeben sind die Parabel $P: \quad y = x^2$ und die Zufallsgerade $g: \quad y = kx + d$, wobei k und d durch Zufall bestimmt werden. Davon abhängig, was k und d sind, haben P und g einen Punkt, zwei Punkte oder gar keinen Punkt gemeinsam.

(a) (1 Punkt) Welche Bedingung müssen k und d erfüllen, damit (i) P und g keinen gemeinsamen Punkt, (ii) P und g genau einen gemeinsamen Punkt, (iii) P und g zwei Punkte gemeinsam haben? (Hinweis: $x^2 - kx - d = 0$ ist die Gleichung, die die gemeinsamen Punkte bestimmt.)

(i) $k^2 + 4d < 0$, (ii) $k^2 + 4d = 0$ und (iii) $k^2 + 4d > 0$

k kann die Werte $-2, -1, 0, 1, 2$ annehmen, und die Wahrscheinlichkeit beträgt für jeden Wert $\frac{1}{5}$. Der Wert von d ist unabhängig vom Wert von k und liegt in der Menge $\{-1, 0, 1\}$ und alle diese Werte sind gleich wahrscheinlich.

(b) (3 Punkte) Es sei X die Anzahl der gemeinsamen Punkte. Berechnen Sie $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ und $E(X)$. (Hinweis: Fertige eine Tabelle an!)

Tabelle mit $k^2 + 4d$.

	$k=-2$	$k=-1$	$k=0$	$k=1$	$k=2$
$d=-1$	0	-3	-4	-3	0
$d=0$	4	1	0	1	4
$d=1$	8	5	4	5	8

Somit $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ und $P(X = 2) = \frac{3}{5}$. Somit $E(X) = \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5} = 1\frac{2}{5}$.