Erste Schularbeit Mathematik Klasse 7A G am 12.11.2015
Wiederholung

Aufgabe 1. (2P) **Zahlenmengen**.
Es folgen Aussage über Zahlenmengen. Kreuzen Sie die beiden korrekten Aussagen an!

☒	$2 \cdot 10^{-3} \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$.
☐	$(i+1)^4 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
☐	$\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$.
☐	$(0,1) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
☒	$(\sqrt{5}-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{2}) \in \mathbb{N}$.

Kommentar: $(i+1)^2 = 2i$, also $(i+1)^4 = -4$ ist eine reelle Zahl. Das Intervall $(0;1)$ enthält auch Bruchzahlen!

Aufgabe 2. (2P) **Komplexe Zahlen 1**.
Der Betrag einer komplexen Zahl z sei 7. Das Argument von z sei $\frac{3\pi}{4}$ (in Bogenmaß). Bestimmen Sie z^2.

$z^2 = -49i$
Kommentar: Das Argument von z^2 ist $3\pi/2$, also es liegt auf der negativen imaginären Achse. Der Betrag ist 7^2 ist also 49.

Aufgabe 3. (2P) **Komplexe Zahlen 2**.
Eine reelle quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat als Lösung eine komplexe Zahl $-8+5i$. Bestimmen Sie die andere komplexe Lösung und finden Sie p und q - m.a.W. finden Sie einen Termausdruck für die quadratische Gleichung.

andere komplexe Lösung: $-8-5i$
$p = -16$
$q = 89$

Aufgabe 4. (2P) **Komplexe Zahlen 3**.
Gegeben sind die komplexen Zahlen $z = 5+12i$ und $w = 3+4i$. Bestimmen Sie Folgendes!

Realteil von $\overline{z}w$: 63
Imaginärteil von $z+2w$: 20
Betrag von $z-w$: $\sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

Aufgabe 5. (2P) **Äquivalente Terme**.
Gegeben sind vier Terme. Ordnen Sie jedem Term in der linken Tabelle den passenden äquivalenten Term aus der rechten Tabelle zu!

Linke Tabelle	
$(x+2y)\cdot(x+2y)^{-1}$	F
$(x+2y)(x-2y)^{-1}$	C
$(x^2-4y^2)(x+2y)^{-2}$	B
$x^2\cdot y^{-2}\cdot(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})$	E

Rechte Tabelle	
A	0
B	$\frac{x-2y}{x+2y}$
C	$\frac{x+2y}{x-2y}$
D	$\frac{x^4-y^4}{x^2y^2}$
E	$\frac{x^4-x^2y^2}{xy^3}$
F	1

Aufgabe 6. (2P) **Parabel und Gerade**.
Die Parabel **P** sei durch die Gleichung $y=x^2+3$ gegeben. Bestimmen Sie einen positiven Wert des Parameters a, sodass die Gerade $g:\quad y=ax-8$ nur **einen** Punkt gemeinsam mit der Parabel **P** hat.

$a=2\sqrt{11}$
Die Gleichung $x^2+3=ax-8$ darf nur eine Lösung zulassen: Die Diskriminante von $x^2-ax+11=0$ muss verschwinden. Somit $a^2=44$ und wir brauchen die positive Lösung.

Aufgabe 7. (2P) **Tangente an Graphen**.
Gegeben ist die Funktion $g(x)=\frac{x^2-4}{2}$. Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift $y=kx+d$ für die Tangente am Graphen von g an der Stelle $x=1$.

$y=x-\frac{5}{2}$
Man findet $g'(1)=1$. Daher $k=1$. $g(1)=-\frac{3}{2}$, somit $d=-5/2$.

Aufgabe 8. (2P) **Lineare Funktion bei** $x = 2$.
Von einer linearen Funktion $h(x) = kx + d$ ist bekannt, dass $\frac{h(4)-h(1)}{3} = -2$ und $h(5) = 10$. Bestimmen Sie $h(1)$.

$h(1) = 18$
Die Steigung ist -2. Daher $h(1) = h(5) + 4 \cdot 2 = 18$. Oder: $h(x) = -2x + d$ und $h(5) = 10$, somit $d = 20$ und daher $h(1) = -2 \cdot 1 + 20 = 18$.

Aufgabe 9. (2P) **Quotienten**.
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Bestimmen Sie:

(a) Den Differenzenquotient von f im Intervall $[-1; 2]$: $-\frac{1}{5}$.
(b) Die absolute Änderung von f im Intervall $[-2; 2]$: 0.
(c) Die mittlere Steigung von f im Intervall $[-2; 1]$: $\frac{1}{5}$.
Es geht leicht, wenn man sieht, dass die Funktion symmetrisch ist. Somit unterscheiden sich die Antworten bei (a) und (c) im Vorzeichen. Des Weiteren $f(1) = f(-1) = 0$ und $f(2) = f(-2) = -\frac{3}{5}$.

Aufgabe 10. (2P) **Volumen einer Kugel**.
Die Funktion $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Radius einer Kugel und ihrem Volumen.

Bestimmen Sie den Radius a, für den gilt $V'(a) = \pi$.

Antwort: $a = \frac{1}{2}$. Denn $V'(a) = 4\pi a^2$.

Aufgabe 11. (2P) **Änderungen**.
Gegeben sind die zwei Geraden $g: \quad 3x - 2y = 9$ und $h: \quad a \cdot x + 3y = 10$. Bestimmen Sie a, sodass g und h parallel sind.
$a = -4\frac{1}{2}$. Denn $(3|-2)$ und $(a|3)$ sind parallel genau dann wenn $3 \cdot 3 - a \cdot -2 = 0$, also wenn $a = -9/2$.

Aufgabe 12. (2P) **Ermitteln der ersten Ableitung**.
Ordnen Sie jeder Funktion ihre Ableitung zu!

Funktionen	
$f(x) = (x+1)^3$	C
$f(x) = x^3 + 3x$	F
$f(x) = x^2 + 3$	D
$f(x) = (x+1)^2$	A

Ableitungen	
$f'(x) = 2x + 2$	**A**
$f'(x) = 2x$	**B**
$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$	**C**
$f'(x) = 2x + 3$	**D**
$f'(x) = x^2 + 2x + 3$	**E**
$f'(x) = 3x^2 + 3$	**F**

Erste Schularbeit Mathematik Klasse 7A G am 12.11.2015

TEIL 2

Christian FULMEK

Aufgabe 1. *Komplexe Zahlen*

(a). (2 Kompensationspunkte) **Reell oder nicht?** Sie sehen hier 5 Aussagen über komplexe Zahlen. Kreuzen Sie diejenigen Aussagen an, die auf alle $z \in \mathbb{C}$ zutreffen!

$\square$	$z - \overline{z} \in \mathbb{R}$.
$\boxtimes$	$z\overline{z} \in \mathbb{R}$.
$\boxtimes$	$i(z - \overline{z}) \in \mathbb{R}$.
$\square$	$z^2 \in \mathbb{R}$.
$\square$	$i(z + \overline{z}) \in \mathbb{R}$.

(b) (3 Punkte) Gegeben sind $z = 3 + i$ und $w = 1 + 2i$. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten 0, z und w.

Benutze Vektorprodukt für $(3|1|0)$ und $(1|2|0)$, denn $|\vec{v} \times \vec{w}|$ ist die Fläche vom Parallelogramm aufgespannt durch $\vec{v}$ und $\vec{w}$. In dem Fall ist das Vektorprodukt 5, die Fläche somit $5/2$.

(c). (3 Punkte) Seien jetzt z und w beliebige komplexe Zahlen. Benutzen Sie den Satz von De Moivre für Folgendes: (i) Drücken Sie das Argument von $z\overline{w}$ in $\mathrm{Arg}(z)$ und $\mathrm{Arg}(w)$ aus und (ii) finden Sie eine Beziehung zwischen $\mathrm{Im}(z\overline{w})$ und dem Flächeninhalt mit den Eckpunkten 0, z und w.

Das Argument von $\overline{w}$ ist Minus das Argument von w. Somit ist das Argument von $z\overline{w}$ genau $\mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(w)$. Aus dem Satz von De Moivre ist bekannt, dass $\mathrm{Im}(z\overline{w}) = |z\overline{w}| \sin(\mathrm{Arg}(z\overline{w})) = \pm|z||w| \sin(\alpha)$, wobei α der Winkel zwischen z und w ist. Dies ist aber genau die Fläche des Parallelogramms, aufgespannt von z und w. Somit ist der (reelle) Betrag von $\mathrm{Im}(z\overline{w})$ genau das Doppelte von der Fläche des Dreiecks.

Aufgabe 2. *Differenzenquotient versus Differentialquotient.*

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2}{3+x}$.

(a) (2 Kompensationspunkte) Geben Sie einen Ausdruck für den Differenzenquotienten im Intervall $[a; a+h]$ und vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich.

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Hinweis: Benutzen Sie (a) und betrachten Sie den Grenzfall $h \to 0$.

(a) $\frac{-2}{(3+a)(3+a+h)}$
(b) $-\frac{2}{(a+3)^2}$

Aufgabe 3. *Monotonieverhalten*

Gegeben ist die Funktion $k(x) = (x^2-4)^2$.

(a) (2 Kompensationspunkte) Geben Sie einen Ausdruck für $k'(x)$ und lösen Sie die Gleichung $k'(x) = 0$.

(b) (3 Punkte) Finden Sie die Intervalle, in welchen k monoton steigend und in welchen monoton fallend ist. Finden Sie auch die Wendestellen von k!

(a) $k'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2-4)$ ist Null genau dann wenn $x = 0$, oder $x = \pm 2$.
(b) Steigend $(-2; 0)$ und $(2; \infty)$. Fallend $(-\infty; -2)$, $(0; 2)$. Wendestelle $k''(x) = 0$, also $12x^2 - 16 = 0$, somit $x = \pm\sqrt{\frac{16}{12}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Aufgabe 4. *Kubisches Polynom finden „on demand"*

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie mittels Berechnung, dass das kubische Polynom $q(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ keine Extremstellen hat. Schließen Sie daraus, wie viele Lösungen die Gleichung $q(x) = 0$ hat.

(b) (3 Punkte) Finden Sie ganz allgemein ein Kriterium, das eintscheidet, ob ein Funktion $r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ Extremstellen hat, oder nicht. Hinweis: die Gleichung $r'(x) = 0$ ist eine quadratische Gleichung.

(c) (3 Punkte) Finden Sie ein kubisches Polynom $s(x) = x^3 - Ax^2 - Bx - C$, das folgende Eigenschaften aufweist:
(1) s hat eine Wendestelle bei $x = 1$
(2) s hat eine Extremstelle bei $x = 3$
(3) s hat eine Nullstelle bei $x = 5$.

(a) $q'(x) = 3x^2 - 4x + 3$. Diskriminante ist -20, also keine Lösung.
(b) $r'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Die Anzahl der Nullstellen hängt von der Diskriminante ab, welche jetzt ist $D = (2b)^2 - 12ac$. Also wenn $b^2 - 3ac$ positiv ist, dann zwei, wenn Null, dann eine, wenn negative dann keine Estremstellen.
(c) $s''(x) = 6x - 2A$, $s'(x) = 3x^2 - 2Ax - B$.
Also mit (1): $s''(1) = 0$, also $A = 3$.
Dann mit (2): $s'(3) = 0$ also $27 - 18 - B = 0$ also $B = 9$.
Dann mit (3) $s(5) = 0$ also $125 - 3 \cdot 25 - 9 \cdot 5 - C = 0$ also $C = 5$.